חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי לכלכלנים

ד"ר יבגני צודיקוביץ', אוניברסיטת בן-גוריון בנגב

28 בפברואר 2026

תקציר

זוהי חוברת ההרצאות והתרגילים של הקורס חדוו"א ד' לכלכלנים ועוסקת בכלים המתמטיים הבסיסיים הנדרשים עבור לימודי הכלכלה: חקירת פונקציות, גזירה, אינטגרציה ואופטימיזציה עם וללא אילוצים. החומר מבוסס בכבדות על ההרצאות של ד"ר דוד לגזיאל שלימד את הקורס בעבר.

גירסא 1 - סמסטר תשפ"ו ב

תוכן העניינים

1 מבוא לפונקציות

1.1 קבוצות

האובייקט המתמטי הבסיסי בעזרתו נתאר פונקציות (ולא רק) הוא הקבוצה. **קבוצה** היא אוסף של איברים ללא חשיבות לסדר וללא חשיבות למספר ההופעות של כל איבר בקבוצה. נשתמש באותיות לטיניות גדולות לתיאור קבוצות ואת איברי הקבוצה בין סוגריים מסולסלים. כך למשל, הקבוצה $A=\{1,2\}$ היא קבוצה הכוללת שני איברים, המספרים 1 ו-2 ואילו הקבוצה $B=\{1,5,8\}$ כוללת שלושה איברים. מאחר ואין משמעות לסדר ברישום איברי הקבוצה וכל שחשוב הוא איזה איברים יש בקבוצה ולא כמה פעמים נרשום אותם, הקבוצה $C=\{2,1,2\}$ היא למעשה הקבוצה A, ועל כן $A=C$.

בקורס נעסוק בעיקר בקבוצות של מספרים, ושתי הקבוצות העיקריות הן קבוצת המספרים הטבעיים וקבוצת המספרים הממשיים. קבוצת **הטבעיים** היא הקבוצה המוכרת מהגן: $\mathbb{N}=\{1,2,3,...\}$ וקבוצת **הממשיים** $\mathbb{R}$ היא קבוצת המספרים ה"רגילים" הכוללת בנוסף לטבעיים גם מספרים שליליים, שברים ומספרים אי-רציונליים. קבוצות של מספרים ממשיים הכוללות את כל המספרים בטווח מסויים נקראות **קטעים**, ואותם אפשר לרשום בסימון מקוצר באמצעות סוגריים וציון קצוות הקטע, כאשר סוגריים מרובעים מסמלים שהקצה נכלל בקטע וסוגריים עגולים מסמלים שלא. לכן הקטע $[0,1]$ הוא קבוצת כל המספרים בין 0 ל-1 (כולל), ואילו הקטע $[0,3)$ הוא כל המספרים בין 0 (כולל) ל-3 (לא כולל את 3). בסימון זה, קבוצת כל המספרים הממשיים ניתנת לרישום כקטע הכולל את כל המספרים בין מינוס אינסוף לאינסוף: $\mathbb{R}=(-\infty,\infty)$. דרך אחרת לרשום קבוצות של מספרים ממשיים היא באמצעות סוגריים וכלל שהאיברים בקבוצה צריכים לקיים. למשל הקבוצה $\{x\in\mathbb{R}|x\neq 0\}$ היא קבוצת המספרים הממשיים שאינם שווים ל-0, כלומר כל הממשיים פרט ל-0. את הסוגריים יש לקרוא (משמאל לימין כך): קבוצת כל המספרים $x\in\mathbb{R}$ -כך ש (זו המשמעות של הסימן |) $x\neq 0$. בדומה, $\{x\in\mathbb{R}|x>4,x\neq 6\}$ היא קבוצת המספרים הממשיים הגדולים ממש מ-4, פרט ל-6.

כאשר a הוא איבר בקבוצה A נרשום $a\in A$ ונאמר ש-a הוא איבר ב-A או **שייך** ל-A. אחרת, נסמן $a\notin A$. כך למשל, $1\in\mathbb{N}$ וגם $1\in\mathbb{R}$, אבל $\pi\in\mathbb{R}$ בעוד ש-$\pi\notin\mathbb{N}$, שהרי פאי הוא מספר ממשי אבל לא מספר טבעי. באופן כללי, כל מספר טבעי הוא גם ממשי וקשר זה ניתן לתרגם למונחי קבוצות באמצעות הטענה: כל איבר של $\mathbb{N}$ הוא גם איבר של $\mathbb{R}$. בסימונים, נרשום $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{R}$ ונאמר ש-$\mathbb{N}$ חלקית ל-$\mathbb{R}$ או $\mathbb{N}$ תת קבוצה של $\mathbb{R}$. לחילופין, נאמר ש-$\mathbb{R}$ מכילה את $\mathbb{N}$.

עבור שתי קבוצות A,B נגדיר את ההפרש ביניהן על ידי $A\setminus B=\{x\in A|x\notin B\}$, כלומר זוהי קבוצת כל האיברים שנמצאים ב-A אבל לא ב-B. למשל $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ היא קבוצת המספרים הממשיים פרט ל-0 ואילו $\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$ היא קבוצת המספרים הממשיים שאינם מספרים טבעיים.

1.2 פונקציות

האובייקט המתמטי העיקרי בו נעסוק בקורס הוא הפונקציה, המתאימה לכל איבר מקבוצה אחת (קבוצת **התחום**) איבר אחד מקבוצה אחרת (קבוצת **הטווח**). אם A הוא התחום של הפונקציה ו-B הוא הטווח, נרשום $f:A\to B$ על מנת לציין ש-f היא פונקציה מ-A ל-B. לכל איבר $x\in A$ (הקלט של הפונקציה) נסמן ב-$f(x)\in B$ את תוצאת הפעלת הפונקציה f על x (הפלט של הפונקציה; ראו איור 1.1). לרוב נסמן פונקציות על ידי אותיות קטנות כמו f,g,h.

האופן בו הפונקציה מתאימה איברים מהתחום לטווח נקרא **כלל ההתאמה** ולרוב מבוטא

איור 1.1: ציור סכמטי של פונקציה המקבלת כקלט את המספר x ומוציאה כפלט את המספר $f(x)$.

על ידי נוסחא. למשל, הפונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $f(x)=x+3$ מתאימה לכל מספר ממשי x את המספר הממשי הגדול ממנו ב-3. אנחנו נתמקד בעיקר בפונקציות ממשיות, כלומר פונקציות שהתחום והטווח שלהן הוא $\mathbb{R}$ או קטע המוכל ב-$\mathbb{R}$. להלן מספר דוגמאות בסיסיות של פונקציות (פונקציות כאלו נקראות פונקציות אלמנטריות, ראו איור 1.2):

1. **פולינומים** - פונקציות המורכבות מסכומים של חזקות טבעיות של x כפול מספרים ממשיים. למשל: $f(x)=x^2+10, g(x)=x^7-3x+2, h(x)=\pi x^{100}-x+3$ בנוסף, הפונקציה הקבועות דוגמת $f(x)=3$ (המתאימות לכל x מספר קבוע, ללא תלות ב-x) הן פולינומים.

2. **פונקציות רציונליות** - פונקציות המורכבות ממנה של שני פולינומים, למשל $f(x)=\frac{x^2-17}{x^7+8x-7}$.

3. **שורשים** - פונקציות הכוללות שורש של x ובאופן כללי חזקות חיוביות לא שלמות של x, למשל $f(x)=\sqrt{x}=x^{1/2}, g(x)=\sqrt[17]{x}$.

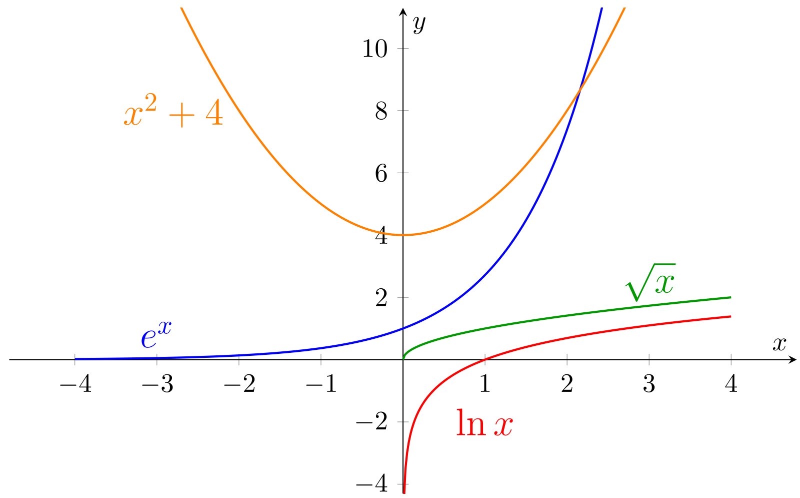
   הערה: כדי ששורש תהיה פונקציה ולכל x אכן יתאים ערך אחד, הוסכם כי שורש זוגי של מספר הוא תמיד המספר החיובי, למרות שיש שתי אפשרויות. כך, $\sqrt{4}=2$ ולא $\sqrt{4}=-2$ או $\sqrt{4}=\pm 2$. ראו את השרטוט של הפונקציה $\sqrt{x}$ באיור 1.2.

4. **פונקציות מעריכיות** - פונקציות בהן המשתנה x מופיע במעריך החזקה, בניגוד לפולינומים בהם הוא מופיע בבסיס החזקה. למשל, $f(x)=7^x$. בהקשר זה, יעניינו אותנו בעיקר פונקציות בהן בסיס החזקה הוא המספר המיוחד $e=2.71...$ המכונה גם "מספר אוילר" או "בסיס הלוגריתם הטבעי". בהמשך נראה כי למספר זה יש תכונות מיוחדות רבות וכי הוא יכול להופיע במפתיע בבעיות רבות (למשל, בחישובי ריבית). לעיתים נסמן את הפונקציה $f(x)=e^x$ באמצעות הביטוי $\exp(x)$, כקיצור של השם הנוסף של הפונקציה, "אקספוננט".

5. **פונקציות לוגריתמיות** - פונקצות בהן מפעילים על המשתנה את פעולת הלוגריתם (ראו פרק 1.4). למשל $f(x)=\log_{10}x$ היא הפונקציה המחזירה לכל ערך של x את המספר y כך ש-$10^y=x$. בעיקר תעניין אותנו פעולת הלוגריתם בה הבסיס הוא המספר e, המכונה לאן ומסומנת על ידי $f(x)=\ln(x)$.

כאמור, נתמקד בעיקר בפונקציות ממשיות אותן ניתן להביע באמצעות נוסחא. במקרה כזה, התחום של הפונקציה יהיה $\mathbb{R}$ או תת קבוצה של $\mathbb{R}$. התחום לא יהיה כל $\mathbb{R}$ אם אין לכך משמעות כלכלית (למשל, מחיר הוא מספר חיובי ולכן פונקציות של מחירים יוגדרו רק עבור מספרים חיוביים) או אם המתמטיקה אוסרת עלינו להציב מספרים מסויימים בנוסחא. **חוקי החשבון עליהם נצטרך להקפיד הם שלא מחלקים ב-0, לא מפעילים שורש ממעלה זוגית על מספר שלילי ולא מפעילים $\ln$ על מספר שלילי או 0.**

בנוסף, כדאי לשים לב שתחום ההגדרה מבוסס על האופן בו הפונקציה כתובה בפועל ולא על האופן בו היא יכולה להיות כתובה אחרי פעולות אלגבריות. למשל, תחום ההגדרה



איור 1.2: שרטוט של מספר פונקציות אלמנטריות: פולינום, שורש, אקספוננט ולאן.

של $f(x)=\ln(x^2)$ הוא $x\neq 0$ כי לכל x אחר הביטוי בתוך ה-$\ln$ חיובי. לכאורה, ניתן לחשוב שמאחר ו-$\ln(x^2)=2\ln(x)$, הרי שתחום ההגדרה יהיה $x>0$ כי זה תחום ההגדרה של הביטוי באגף ימין. הסיבה שזה לא נכון היא שהשיוויון כמו שהוא מתקיים רק עבור x-ים שעבורם שני הביטויים מוגדרים. אם נרצה לעשות מעבר דומה תוך הקפדה על שמירה על תחום ההגדרה, נרשום $\ln(x^2)=2\ln|x|$ ואז בשני האגפים רשום ביטוי שמוגדר לכל $x\neq 0$. כנ"ל לגבי ביטוי מהצורה $\frac{x^2-1}{x-1}$: הביטוי לא מוגדר עבור $x\neq 1$ למרות שעל ידי אלגברה פשוטה אפשר לצמצם מונה ומכנה ולקבל $\frac{x^2-1}{x-1}=x+1$. אמנם תחום ההגדרה של אגף ימין הוא כל $\mathbb{R}$, תחום ההגדרה של הביטוי המקורי הוא $x\neq 1$.

דוגמא 1.1. חשבו את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=x^2+4x-5$.

ב. $f(x)=\frac{x+3}{x^2+4x-5}$.

ג. $f(x)=\sqrt{x^2+4x-5}$.

ד. $f(x)=\ln(x^2+4x-5)$.

פתרון. 1. אין הגבלה על ערכי ה-x שניתן להציב ב-$f(x)$, לכן תחום ההגדרה הוא $\mathbb{R}$.

2. זוהי פונקציה רציונלית וההגבלה היחידה היא שהמכנה חייב להיות שונה מאפס. מהדרישה $x^2+4x-5\neq 0$ נקבל (ראו פרק 1.4) $x\neq 1,-5$, ולכן תחום ההגדרה הוא $\mathbb{R}\setminus\{1,-5\}$.

3. זוהי פונקציית שורש והדרישה היא שנפעיל את השורש על מספרים אי-שליליים. בדומה לסעיף הקודם, הביטוי בתוך השורש אי-שלילי כאשר $x\geq 1$ או כאשר $x\leq -5$ ולכן תחום ההגדרה הוא $\{x\in\mathbb{R}|x\leq -5 \text{ או } x\geq 1\}$.

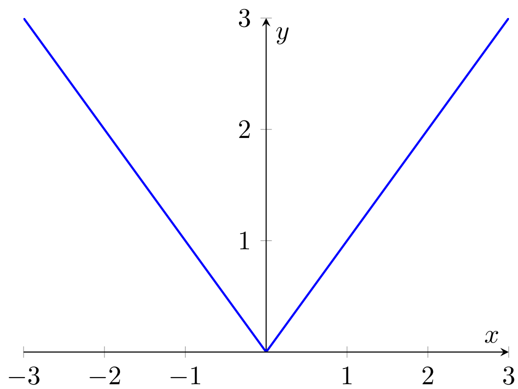
4. בדומה לסעיף הקודם, תחום ההגדרה נגזר מכך שניתן להפעיל את פונקציית הלאן רק על מספרים חיובים ממש. לכן הערכים עבורם הביטוי בתוך הלאן מתאפס אינם חלק מתחום ההגדרה, ותחום ההגדרה הוא $\{x \in \mathbb{R} | x < -5$ או $x > 1\}$.

■

לעיתים, הנוסחא המתארת את הפונקציה איננה זהה לכל x ומשתנה בין תחום לתחום. במקרה כזה, נתאר את הפונקציה על ידי חלוקה לתחומים. למשל, פונקציית הערך המוחלט, המחזירה את הערך של x ללא הסימן, ניתנת לתיאור על ידי

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

הפיצול למקרים מאפשר רישום נוח של פונקציה שלא ניתן (בכלל או בצורה פשוטה) לרשום באמצעות נוסחא אחת. ניתן לראות שרטוט של פונקציית הערך המוחלט באיור 1.3.



איור 1.3: פונקציית הערך המוחלט.

ישנם כלי עזר רבים באינטרנט באמצעותם ניתן לשרטט פונקציות, דוגמת Desmos.com. השימוש בכלים אלו יכול לעזור כדי להבין איך פונקציות נראות ומתנהגות וגם כדי לוודא את התשובות והחישובים, אך חשוב לזכור כי מדובר על כלי עזר בלבד. ככלל, **שרטוט אינו מהווה הוכחה**.

תרגיל 1.1. מצאו את תחומי ההגדרה של הפונקציות הבאות:

1. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$.
2. $f(x) = \ln(x+2) - \ln(x-2)$.
3. $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2} + \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$.
4. $f(x) = \frac{x^2-2x}{x}$.
5. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \geq 1 \\ \sqrt{x}, & x < 1 \end{cases}$.

6. $f(x)=\sqrt{\ln\left((3-2x)(1-x)\right)}$.

7. $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{4-3x}}{x^2-3x+2}, & x<1\\ \frac{2x^2-6x+4}{x^2-1}, & x>1\end{cases}$.

8. $f(x)=\ln(e^x-1)+\sqrt{(-x-3)(1+x)}$.

1.2.1 תכונות של פונקציות

בפרק זה נכיר מספר תכונות בסיסיות שיכולות להיות לפונקציות. תכונות אלו מעניינות כי לעיתים קרובות יש להן משמעות כלכלית. למשל, נניח שהתועלת שמפיק אדם מסכום כסף $x\geq 0$ הינה $f(x)=\ln(x+1)$. לפונקציה זו התכונה הבאה: אם $x_1>x_2$ אז $f(x_1)>f(x_2)$, כלומר ככל שיש יותר כסף כך התועלת שנפיק ממנה יותר גבוהה (עדיף להיות עשיר מאשר עני...). במונחים של פונקציות, נאמר שהפונקציה $f(x)$ היא פונקציה עולה והרבה פונקציות המתארות קשרים בין משתנים כלכליים הן עולות או מקיימות את הקשר ההפוך, כלומר יורדות.

הגדרה 1.1. הפונקציה $f(x)$ נקראית פונקציה **עולה** אם לכל $x_1>x_2$ מתקיים $f(x_1)\geq f(x_2)$. הפונקציה נקראית **עולה ממש** אם אי-השוויון חזק, כלומר $f(x_1)>f(x_2)$.

באופן דומה, אם מכך ש-$x_1>x_2$ נובע ש-$f(x_1)\leq f(x_2)$ נאמר שהפונקציה **יורדת** ואם נובע ש-$f(x_1)<f(x_2)$ נאמר שהיא **יורדת ממש**.

אם נרצה להדגיש שהפונקציה עולה אבל לא עולה ממש, נאמר שהיא עולה חלש או שהיא לא יורדת, ובאופן דומה נאמר שפונקציה יורדת חלש או לא עולה אם היא יורדת אבל לא יורדת ממש. באופן כללי נקרא לפונקציות עולות ויורדות פונקציות מונוטוניות. לדוגמא, הפונקציות האלמנטריות אקספוננט, לאן ושורש הן פונקציות מונוטוניות עולות (ראו איור 1.2).

לעומתן, הפונקציה $f(x)=x^2+4$ המופיעה באיור 1.2 אינה עולה ואינה יורדת: $-1<0$ אבל $f(-1)>f(0)$ (ולכן הפונקציה לא עולה) ומאידך $1>0$ ומתקיים $f(1)>f(0)$ ולכן הפונקציה גם לא יורדת. יחד עם זאת, אם נפצל את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ נקבל תחומים שבהם היא עולה ותחומים שבהם היא יורדת. הפונקציה $f(x)=x^2+4$ עולה ממש בתחום $x\geq 0$, שכן לכל $x_1>x_2\geq 0$ מתקיים $f(x_1)>f(x_2)$ ויורדת ממש בתחום $x\leq 0$ שכן לכל $x_2>x_1\geq 0$ מתקיים $f(x_2)>f(x_1)$.

תרגיל 1.2. האם הפונקציות הבאות עולות, עולות-ממש, יורדות, יורדות-ממש או שאינן מונוטוניות? הוכיחו.

א. $f(x)=1/x^2$.

ב. $f(x)=\ln(1/x)$.

ג. $f(x)=4$.

ד. $f(x)=(1/2)^x$.

כאמור, הטווח של הפונקציה הוא קבוצת הערכים שהפונקציה יכולה לקבל. בפועל, הפונקציה לאו דווקא מקבלת את כל הערכים בטווח. אנו מגדירים את **התמונה של הפונקציה**

בתור קבוצת כל הערכים שהפונקציה מקבלת בפועל. תהי $f: A \to B$ פונקציה. התמונה של f היא קבוצת הערכים המתקבלת על ידי הפעלת f על כל איברי A:

$$f(A) = \{f(x)|x \in A\} \subseteq B.$$

למשל, עבור הפונקציה $f(x) = x^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ התמונה תהיה $f(\mathbb{R}) = \{x|x \geq 0\}$, כי הפונקציה מחזירה רק מספרים אי-שליליים. בדומה, התמונה של הפונקציה $g(x) = x^3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ היא $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, כי כל מספר ממשי הוא חזקה שלישית של מספר ממשי כלשהו.

בדוגמא האחרונה ראינו שעבור $g(x) = x^3$ הטווח והתמונה שווים. פונקציות כאלו נקראות **פונקציות על**. לשם הנוחות, ניתן תמיד להגדיר מחדש את הפונקציה כך שהטווח שלה תהיה התמונה, ולכן על ידי שינוי הטווח הפונקציה תהיה על. כך, הפונקציה $f(x) = x^2$ מהפסקה הקודמת היא פונקציה על כאשר היא מוגדרת להיות $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R}|x \geq 0\}$.

נשים לב כי פונקציה מוגדרת להיות התאמה מהתחום לטווח כך שלכל x בתחום מתאים איבר אחד ויחד בטווח, דהיינו יש מספר יחיד בטווח y המקיים $y = f(x)$. כאשר הפונקציה היא על, לכל מספר בטווח y יש מקור לפי f, כלומר יש **לפחות** איבר אחד בתחום x המקיים $y = f(x)$. ייתכן בהחלט, כמו במקרה של $f(x) = x^2$, שלערכים מסויימים יהיה יותר ממקור אחד, שכן למשל $f(2) = f(-2) = 4$ ולכן גם 2 וגם -2 מקורות של 4. כאשר יש לכל היותר מקור אחד, הפונקציה נקראית חד-חד-ערכית (חח"ע):

הגדרה 1.2. הפונקציה $f: A \to B$ נקראית **חד-חד-ערכית (חח"ע)** אם לכל $x_1, x_2 \in A$ המקיימים $f(x_1) = f(x_2)$ מתקיים בהכרח $x_1 = x_2$. באופן שקול ניתן לומר כי הפונקציה חח"ע אם $x_1 \neq x_2$ גורר $f(x_1) \neq f(x_2)$.

המחשה של הרעיון של פונקציה חח"ע ניתן לראות באיור 1.4, על ידי העברה של קווים המקבילים לציר ה-x (ערך ה-y של כל נקודה על קו כזה זהה). עבור פונקציה חח"ע (כמו הפונקציה האדומה), כל קו כזה יחתוך את הפונקציה בנקודה אחת לכל היותר, שכן לכל ערך של y קיים לכל היותר x יחיד בתחום עבורו $y = f(x)$. לעומת זאת, עבור פונקציה שאינה חח"ע (כמו הפונקציה הכחולה), קווים מקבילים מסויימים יחתכו את הפונקציה ביותר ממקום אחד. במקרה כזה, ישנם מספר ערכי x שממופים על ידי הפונקציה הכחולה לאותו ערך של y.

תרגיל 1.3. עבור כל אחת מהפונקציות קבעו האם הן חח"ע והאם הן על. אם הן לא על - חשבו את התמונה של הפונקציה.

א. $f(x) = 2x - 1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

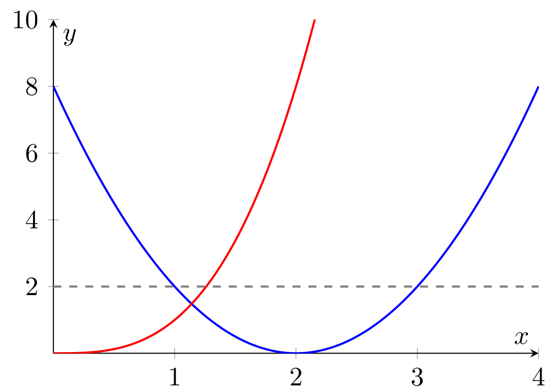
ב. $f(x) = |x| + 4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$

ג. $f(x) = 1/x : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

ד. $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x < 0 \\ 0.5^x, & x \geq 0 \end{cases}$, כאשר $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$.

תרגיל 1.4. תהי $f: A \to B$ פונקציה שהיא מונוטונית ממש, קרי עולה ממש או יורדת ממש. הוכיחו כי f היא חח"ע.

נתבונן באיור 1.4 וננסה לשאול את השאלה ההפוכה: נניח שאנחנו יודעים את הערך של y, האם אנחנו יודעים איזה ערך של x מתאים לו? שאלה זו שקולה להסתכל על האיור עם



איור 1.4: המחשה של פונקציה חד-חד-ערכית (באדום) ופונקציה שאינה חד-חד-ערכית (בכחול). יש שני ערכים של x המתאימים לערך $y = 2$ (החיתוכים של הפונקציה הכחולה עם הקו המקווקו) ולכן פונקציה זו אינה חד-חד-ערכית. לעומת זאת, כל קו המקביל לציר ה-x שנעביר יחתוך את הפונקציה האדומה בנקודה אחת לכל היותר.

צירים הפוכים, כלומר כאשר ציר y הוא הציר האופקי ואילו ציר x הוא הציר האנכי (ראו איור 1.5). האם מהערך של y ניתן לקבוע את הערך של x? אנו רואים שזה לא נכון עבור הגרף הכחול באיור 1.5: לערך y בודד מתאימים שני ערכי x, ולכן ההתאמה בין y ל-x לא תהיה פונקציה. לעומת זאת, הגרף האדום הוא כן פונקציה, שכן לכל ערך y מתאים ערך x אחד. כאשר ניתן לבצע את התהליך הזה, אנו אומרים שהפונקציה הפיכה.

הגדרה 1.3. תהי $f : A \to B$. אם קיימת פונקציה $g : B \to A$ כך שלכל $x \in A, y \in B$ מתקיים שאם $y = f(x)$ אז $x = g(y)$, נאמר ש-f היא **פונקציה הפיכה** ו-g היא **ההופכית** של f. את ההופכית של f נסמן ב-f^{-1}.

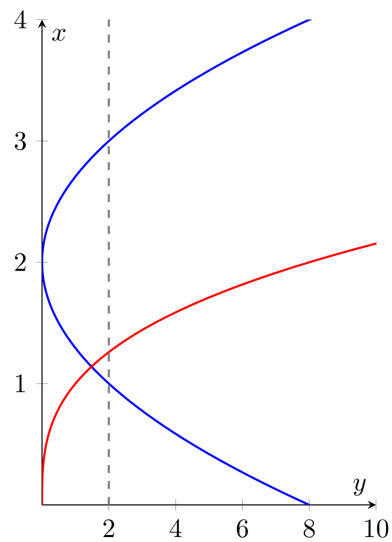
שימו לב: במקרה כזה גם f^{-1} היא פונקציה הפיכה ו-f היא ההופכית של f^{-1}.

פונקציה הפיכה נוחה כי היא מאפשרת לנו לשנות את האופן שבו אנחנו מסתכלים על הבעיה ולנתח את הקשר בין שני המשתנים המעורבים בה באופן שנוח לנו (השוו את איור 1.6 עם איור 1.1). למשל, אנו יודעים כי המחיר של מוצר מסויים p בשוק חופשי בשיווי משקל נקבע לפי ההיצע (ממנו נתעלם כרגע) והביקוש D ולכן קיימת איזושהי פונקציה כך ש-$p = f(D)$. אם f פונקציה הפיכה, אז ניתן במקום זאת להסתכל על הביקוש כפונקציה של המחיר, קרי על $D = f^{-1}(p)$. זאת הצגה נוחה יותר של הקשר בין הביקוש למחיר משתי סיבות: ראשית, הביקוש הוא לרוב לא ידוע. שנית, המחיר הוא הפרמטר שנמצא בשליטת החברה והיא יכולה לבחור איזה מחיר לקבוע (וכתוצאה מכך, לקבוע את הביקוש) ולא נכפה עליה כתוצאה מהביקוש.

נותר רק להשתכנע שהפונקציה $p = f(D)$ היא פונקציה הפיכה. הנחה כלכלית סבירה היא שהמחיר הוא פונקציה מונוטונית ממש של הביקוש (ככל שהביקוש גדל כך גם המחיר גדל) ולכן לפי תרגיל 1.4 זוהי פונקציה חח"ע. מאחר וכל פונקציה ניתן להגדיר מחדש כך שתהיה גם פונקציה על, נקבל ש-f היא פונקציה חח"ע ועל ולפי המשפט הבא, פונקציה הפיכה.

משפט 1.1. תהי $f : A \to B$ פונקציה. הפונקציה f היא הפיכה אם ורק אם היא חח"ע ועל.

בטרם ניגש להוכחה, נעיר על משמעות הביטוי "אם ורק אם (אםם)". לרוב אנחנו נתקלים



איור 1.5: איור 1.4 מסובב, כך שיציב את x כתלות ב-y במקום y כתלות ב-x.

איור 1.6: ציור סכמטי של פונקציה ההפוכה ל-f: היא מקבלת כקלט את המספר $f(x)$ ומוציאה כפלט את המספר x.

בטענות מהסוג "אם ... אז ..." בהן כאשר החלק הראשון מתקיים בוודאי שגם החלק השני מתקיים. בטענה מסוג "אם ורק אם" שני החלקים שקולים, כלומר אם החלק הראשון מתקיים אז החלק השני מתקיים ולהפך: אם החלק השני מתקיים אז החלק הראשון מתקיים. כדי להוכיח כזו טענה עלינו בעצם להוכיח שני כיוונים: (1) אם הפונקציה הפיכה אז היא חח"ע ועל ו-(2) אם הפונקציה היא חח"ע ועל אז היא הפיכה.

הוכחה.

כיוון 1: אם f הפיכה אז היא חח"ע ועל.
נניח כי f הפיכה ונסמן ב-$f^{-1}: B \to A$ את ההופכית שלה. לכל $y \in B$ נגדיר $x = f^{-1}(y) \in A$. מההגדרה של פונקציה הפיכה מתקיים $y = f(x)$. לכן f על.
יהיו $x_1, x_2 \in A$ ונניח $f(x_1) = f(x_2)$. נסמן ערך זה ב-y. מההגדרה של פונקציה הפיכה, מתקיים $x_1 = f^{-1}(y)$ וגם $x_2 = f^{-1}(y)$ ולכן $x_1 = x_2$, כך שהפונקציה f היא חח"ע.

כיוון 2: אם f היא חח"ע ועל אז היא הפיכה. נניח $f: A \to B$ היא חח"ע ועל ונגדיר $g: B \to A$ כך: אם $f(x) = y$ אז $g(y) = x$. נראה כי g היא אכן פונקציה: מכך ש-f היא על, לכל $y \in B$ קיים $x \in A$ כך ש-$f(x) = y$ ולכן לכל $y \in B$ ההתאמה $g(y)$ מוגדרת היטב.

בנוסף, מאחר ו-f חח"ע, $g(y)$ הוא ערך יחיד ב-A (אחרת, היו שני ערכים $x_1 \neq x_2$ עבורם $f(x_1) = f(x_2) = y$) ולכן g היא פונקציה המתאימה לכל איבר ב-B איבר יחיד

ב-A ולפי ההגדרה 1.3, זו ההופכית של f ו-f הפיכה. ■

זוג פונקציות חשובות שהן הופכיות אחת של השניה הן פונקציית האסקספוננט והלוגריתם הטבעי: אם $y = e^x$ אזי $\ln(y) = x$ (ולהפך). זו גם המשמעות המתמטית המסתתרת מאחורי הביטוי "לוגריתם היא הפעולה ההפוכה לחזקה" (ראו נספח 1.4). באופן דומה, אם נתבונן רק במספרים אי-שליליים, שורש היא הפעולה ההפוכה לריבוע: אם $f(x) = x^2 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ אז $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

תרגיל 1.5. האם הפונקציות הבאות הפיכות? אם כן - מצאו את הפונקציה ההופכית.

1. $f(x) = x + 1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
2. $f(x) = e^{x^2} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$.
3. $f(x) = 1/x : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
4. $f(x) = \sqrt{x-5} : \{x \in \mathbb{R} | x \geq 5\} \to \mathbb{R}_+$.

1.2.2 פעולות על פונקציות

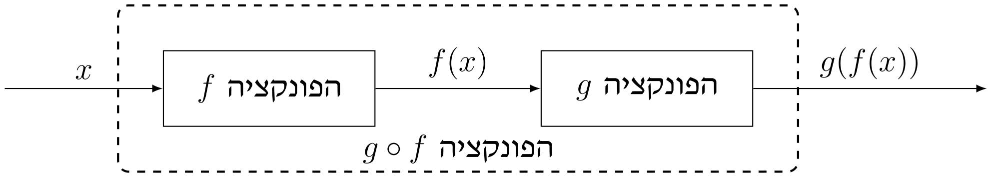
בדומה ל-4 פעולות החשבון בין מספרים, ישנן 4 פעולות חשבון שניתן לבצע בין פונקציות כדי ליצור פונקציה חדשה: חיבור, חיסור, כפל וחילוק. באמצעות הפעלה של פעולות חשבון אלו על מספר פונקציות בסיסיות ניתן ליצור מגוון רחב של פונקציות ולמעשה את רובן המוחלט של הפונקציות בהן נטפל. שיטה זו ליצירת פונקציות תשמש אותנו בהמשך, למשל בהוכחת רציפות של פונקציות (פרק 3): אם נדע להוכיח שהפונקציות הבסיסיות רציפות ונדע שהרציפות נשמרת כאשר מבצעים את 4 פעולות החשבון, מיד נקבל כמסקנה שהרבה מאוד פונקציות הן רציפות.

הגדרה 1.4. תהיינה $f, g : A \to B$ שתי פונקציות עם אותו התחום ואותו הטווח. נגדיר את 4 הפונקציות הבאות:

1. פונקציית הסכום $f + g : A \to B$ המוגדרת על ידי $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$.
2. פונקציית ההפרש $f - g : A \to B$ המוגדרת על ידי $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$.
3. פונקציית המכפלה $fg : A \to B$ המוגדרת על ידי $(fg)(x) = f(x)g(x)$.
4. פונקציית המנה $f/g : A \to B$ המוגדרת לכל x עבורו $g(x) \neq 0$ על ידי $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$.

למשל, אם ניקח את הפונקציה הבסיסית $f(x) = x$ ואת המספרים הממשיים ונשתמש בארבעת הפעולות שהוגדרו, ניתן לבנות כל פונקציה רציונלית. הפונקציה $f(x) = \frac{x^2+3}{x+4}$ היא מנה של הפונקציות $x^2 + 3$ ו-$x + 4$, ואילו x^2 היא מכפלה של הפונקציה x בעצמה.

לפעולת החשבון החמישית בין הפונקציות אין מקבילה במספרים ממשיים. בפעולה זו, פעולת ההרכבה, אנחנו מפעילים פונקציה אחת על x ואת הפונקציה השניה על התוצאה (וזאת בניגוד לפעולות החשבון הקודמות, בהן שתי הפונקציות הופעלו על x). מבחינה פורמלית, תהיינה $f : A \to B, g : B \to C$ שתי פונקציות. **ההרכבה** של g על f מסומנת $g \circ f : A \to C$ ומוגדרת על ידי $g \circ f(x) = g(f(x))$. איור 1.7 מציג תרשים סכמטי של פעולת ההרכבה (השוו לאיור 1.1).

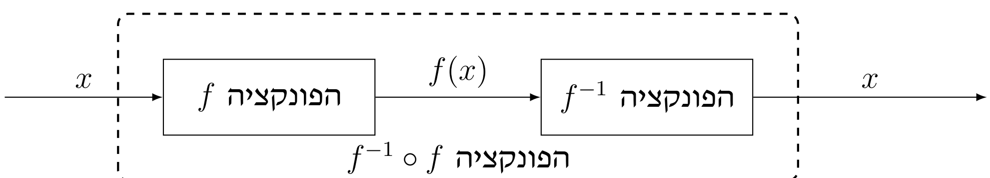


איור 1.7: ציור סכמטי של הרכבה של הפונקציה g על הפונקציה f.

לדוגמא, נתבונן ב-$f(x) = x+3, g(x) = x^2$ ונרכיב את g על f. נקבל את הפונקציה $g \circ f(x) = g\left(f(x)\right) = g(x+3) = (x+3)^2$. שימו לב, בחישוב ההרכבה אנחנו מתייחסים לתוצאה של f בתור המשתנה של g ולכן מפעילים את g (כלומר, את ההעלאה בריבוע) על כולו. באופן דומה, ההרכבה של f על g תהיה $f \circ g(x) = f\left(g(x)\right) = f(x^2) = x^2+3$. ניתן לראות כי מתקיים $f \circ g \neq g \circ f$ כך שפעולת ההרכבה היא לא חילופית וסדר הפעולות משנה (בדומה לחילוק וחיסור ובשונה מחיבור וכפל): להוסיף 3 ולהעלות את התוצאה בריבוע זה לא אותו הדבר כמו להעלות מספר בריבוע ורק אז להוסיף לו 3.

פונקציה מתארת את הקשר בין שני משתנים ("קלט" ו"פלט") ופעולת ההרכבה מאפשרת לייצר את הקשר בין משתנים מסוימים, כאשר ידוע לנו הקשר ביניהם לבין משתנה שלישי כלשהו. למשל, נניח ש-x הוא שעות העבודה של עובד ו-$f(x)$ הוא מספר הרכבים שהעובד מספיק לשטוף ב-x שעות. כמו כן, נניח שאם העובד שטף y רכבים אז הרווח לחברה הוא $g(y)$. באמצעות ההרכבה ניתן לומר שהרווח לחברה מעובד שעבד x שעות הוא $g \circ f(x)$. כאן המשתנים שהפונקציה $g \circ f$ קשרה הם שעות העבודה של העובד והרווח לחברה, והמשתנה השלישי בו נעזרנו הוא מספר הרכבים השטופים.

כזכור, הגדרנו פונקציה הופכית לפונקציה f בתור הפונקציה המקיימת $f^{-1}(y) = x$ אם $y = f(x)$. כעת ניתן להגדיר את הפונקציה ההופכית גם במונחים של הרכבה: אם $f : A \to B$ היא פונקציה הפיכה, אז ההופכית $f^{-1} : B \to A$ מקיימת $f^{-1} \circ f(x) = x$ לכל $x \in A$, ראו איור 1.8. שימו לב שגם מתקיים $f \circ f^{-1}(y) = y$ לכל $y \in B$. כלומר, ההופכית של f היא הפונקציה שאם נרכיב אותה על f "תבטל את הפעולה של f".



איור 1.8: ציור סכמטי של הרכבה של פונקציה הפיכה על ההופכית שלה.

הערה 1.1. שימו לב שה"חזקה" בסימון f^{-1} אין משמעותה חזקה במובן הרגיל של מספרים ממשיים אלא סימון לפונקציה הופכית בלבד. לא נכון להתייחס לסימון זה כאל חזקה ולא נכון לרשום $f^{-1}(x) = 1/f(x)$.

כל הפונקציות הניתנות לבנייה על ידי הפעלה של 4 פעולות החשבון בין הפונקציות והרכבה על הפונקציות הבסיסיות $x^p, e^x, \ln(x)$ (לכל ערך של $p \in \mathbb{R}$) תיקראנה פונקציות אלמנטריות ובהמשך נראה שיש להן תכונות טובות בכל תחום הגדרתן, דוגמת רציפות (פרק 3) וגזירות (פרק 4). בנוסף, גם פונקציות בעלות תחום מפוצל תקראנה פונקציות אלמנטריות

בתנאי שבכל תחום הפונקציה המתקבלת היא פונקציה אלמנטריות לפי ההגדרה דלעיל. למשל $|x|$ לא ניתנת לכתיבה על ידי חזקות, אקספוננט ולוגריתם, אבל בתחום $x \geq 0$ זוהי הפונקציה האלמנטריות x ובתחום $x < 0$ זוהי הפונקציה האלמנטרית $-x$ ולכן גם $|x|$ היא פונקציה אלמנטרית בכל תחום הגדרתה.

1.3 תרגילים מסכמים

תרגיל 1.6. עבור כל אחת מהפונקציות הבאות: חשבו את תחום ההגדרה שלהן וקבעו האם הן חח"ע או לא.

1. $f(x) = \frac{x^2+3}{2x-1}$.
2. $f(x) = \sqrt{x^2-1} + \ln\left(\sqrt{1-4x^2}\right)$.
3. $f(x) = (x-2)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

תרגיל 1.7. נתונות הפונקציות $f(x) = \begin{cases} 2x-3, & x \leq 2 \\ 3-x, & x > 2 \end{cases}$, ו-$g(x) = x^2 - 5x + 5$. שרטטו (באמצעות Desmos או כל תוכנה אחרת) את שתי הפונקציות על אותה מערכת צירים. באמצעות השרטוט, קבעו מתי $f(x) > g(x)$ ומתי $g(x) > f(x)$.

תרגיל 1.8. נתונה הפונקציה $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x \leq 0 \\ -x-1, & 0 < x \leq 3 \\ x-7, & x > 3 \end{cases}$. נגדיר $g(x) = f(x+1)$.

1. רשמו בצורה מפורשת את $g(x)$.
2. שרטטו את $f(x)$ ו-$g(x)$ על אותה מערכת צירים. מה ההבדל ביניהן?

1.4 נספח: זהויות מתמטיות בסיסיות

בסעיף זה נכלול מספר זהויות מתמטיות בסיסיות עליהן נסתמך בהמשך ללא הוכחה. הקורא הסקרן יוכל למצוא הוכחות בספרי מבוא שונים או בספרי לימוד המתאימים לתיכון.

פתרון משוואה ריבועית

הפתרונות של המשוואה הריבועית $ax^2 + bx + c = 0$ עבור $a \neq 0$ נתונים על ידי

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

ישנם שני פתרונות כאשר $b^2 - 4ac > 0$, פתרון יחיד $x = \frac{-b}{2a}$ כאשר $b^2 - 4ac = 0$ ואין פתרונות במספרים ממשיים כאשר $b^2 - 4ac < 0$.

נניח שמתקיים $b^2 - 4ac > 0$ ונסמן את שני הפתרונות ב-x_1, x_2, כאשר $x_2 > x_1$. הפתרון של אי-השוויון $ax^2 + bx + c \geq 0$ הוא $x \leq x_1$ או $x \geq x_2$ כאשר $a > 0$ ו-$x_1 \leq x \leq x_2$ כאשר $a < 0$.

פונקציות מעריכיות ולוגריתמים

חוקי חזקות ($a, b > 0$):

$$a^{-x} = 1/a^x; \quad (a/b)^x = a^x/b^x; \quad a^{x+y} = a^x \cdot a^y; \quad (a^x)^y = a^{xy}$$

לוגריתם היא הפעולה ההפוכה לחזקה. הלוגריתם של $a > 0$ בבסיס $1 \neq b > 0$ הוא המספר שיש להעלות בחזקה שלו את b כדי לקבל את a. למשל, $\log_{10} 100 = 2$ כי $10^2 = 100$.

לוגריתם בבסיס e מכונה לאן ומסומן על ידי $\ln(x)$. מאחר וכמעט תמיד נעבוד בבסיס e, מכאן ואילך נתמקד בתכונות של פונקציית הלאן, אך נזכור כי הן נכונות גם ללוגריתמים בבסיסים אחרים היות ו-$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$.

חוקי לוגריתמים:

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y); \quad \ln(x/y) = \ln(x) - \ln(y); \quad \ln(x^y) = y\ln(x)$$

כאשר אין מקום לבלבול נרשום את פעולת הלאן ללא סוגריים: $\ln(x) = \ln x$. כמו כן, שימו לב להבדל בין שני הביטויים $\ln^2 x, \ln x^2$ (ודומיהם):

$$\ln^2 x = (\ln x)^2; \quad \ln x^2 = \ln(x^2) = 2\ln x$$

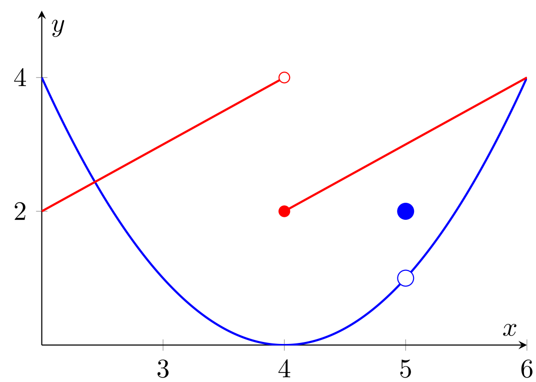
הקשר בין לוגריתם לחזקה הוא שאלו פעולות הפוכות: $x = e^{\ln x}$. לכן, לעיתים נרצה להיעזר בנוסחא הבא בשביל לפשט ביטויים הכוללים חזקה של x גם בבסיס החזקה וגם במעריך:

$$f(x)^{g(x)} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x)\ln f(x)} \tag{1.1}$$

שימו לב שחלק מחוקי החזקות לא שומרים על תחום ההגדרה וצריך לעשות את המעברים בזהירות. למשל, תחום ההגדרה של הביטוי $\ln(x^2)$ הוא $x \neq 0$ אבל תחום ההגדרה של הביטוי $2\ln(x)$ הוא $x > 0$, וזאת למרות שלפי חוקי הלוגריתמים שני הביטויים שווים (היכן הם בעצם שווים?)

2 גבולות

אנו מעוניינים לנתח את ההתנהגות של פונקציות כאשר הן מתקרבות לנקודה מסויימת או לאינסוף. כבר עכשיו נדגיש כי מדובר על שאלה ששונה מהותית מהשאלה מהו הערך של הפונקציה באותה נקודה. כך למשל, נרצה לדעת מה קורה לפונקציה $f(x)=1/x$ כאשר x קרוב מאוד ל-0 וכאשר x גדול מאוד (מתקרב לאינסוף) אבל אנחנו לא יכולים להציב לא 0 ולא אינסוף ישירות בפונקציה. גם אם ניתן להציב את הערך בפונקציה, כלל לא מובטח שהערך של הפונקציה בנקודה וההתנהגות של הפונקציה בסביבת הנקודה היא זהה (ראו על כך בהרחבה בפרק הבא, פרק 3). כך למשל, ניתן להציב $x=5$ בפונקציה $f(x)=\begin{cases}(x-4)^2, & x\neq 5\\ 2, & x=5\end{cases}$, אבל ברור ש-$f(5)$ לא מתאר נאמנה את ההתנהגות של הפונקציה $f(x)$ עבור xים קרובים מאוד ל-5 אך שונים ממנו, ראו את הפונקציה הכחולה באיור 2.1. באופן דומה, בפונקציה האדומה שבאיור 2.1 הערך של הפונקציה בערכים הקרובים מאוד ל-$x=4$ תלוי גם בהאם הערכים קרובים ל-4 וגדולים ממנו או קטנים ממנו.



איור 2.1: שתי דוגמאות לפונקציות בהן ההתנהגות של הפונקציה בקרבת נקודה מסויימת שונה מבנקודה עצמה. למשל, הערכים של הפונקציה הכחולה ליד $x=5$ קרובים ל-1, אך ערך הפונקציה $f(5)=2$. באופן דומה, הערכים של הפונקציה האדומה ליד הנקודה $x=4$ תלויים אם אנחנו מתקרבים אל הנקודה מימין (מהכיוון $x>4$) ואז הפונקציה מתקרבת לערך 2, או משמאל (מהכיוון $x<4$) ואז הפונקציה מתקרבת לערך 4.

במקום הערך של הפונקציה בנקודה, מה שמעניין אותנו הוא ההתנהגות של הפונקציה באזור מסויים סביב הנקודה, ולא בנקודה עצמה. לערך אליו הפונקציה מתקרבת כאשר ערכי x מתקרבים לנקודה מסויימת (אבל לא בנקודה עצמה!) נקרא הגבול של x בנקודה. כך, הגבול של הפונקציה הכחולה מאיור 2.1 בנקודה $x=5$ הוא 1 (ולא 2!) כי בסביבת $x=5$ ערכי הפונקציה מתקרבים לערך 1 ולא לערך $f(5)=2$.

הגדרה 2.1. תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת סביב הנקודה x_0 (כלומר בקטע כלשהו (a,b) כך ש-$a<x_0<b$) אך לאו דווקא בנקודה x_0, ויהי $L\in\mathbb{R}$.
נאמר שהגבול של $f(x)$ ב-x_0 הוא L אם לכל $\epsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שאם $0<|x-x_0|<\delta$ אז $|f(x)-L|<\epsilon$.

במקרה כזה נרשום $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ או $f(x)\xrightarrow[x\to x_0]{} L$.

הרעיון של ההגדרה הוא שכאשר x מתקרב מאוד ל-x_0, אז $f(x)$ מתקרב מאוד ל-L.

אפשר לחשוב על ϵ בתור מידת הדיוק הרצויה (כמה קרוב ל-L אנחנו דורשים מ-$f(x)$ להיות) ועל δ בתור מידת הקרבה הנדרשת בין x ל-x_0 בשביל לעמוד בדרישה. נמחיש זאת באמצעות דוגמא: נתונן ב-$f(x) = x^2 + 3$ ובנקודה $x_0 = 1$:

אנו רוצים לטעון כי $\lim_{x\to 1} x^2 + 3 = 4$. נתחיל ב-$\epsilon = 1$. האם ניתן להתקרב ל-4 עד כדי 1? התשובה היא כן. אם נבחר למשל $\delta = 0.25$, אז כל $x \neq 1$ שמקיים $|x-1| < 0.25$, כלומר, $0.75 < x < 1.25$ בהכרח יקיים גם $|x^2+3-4| < 1$.

מה לגבי $\epsilon = 0.5$? הפעם דורשים מהפונקציה להיות יותר קרובה ל-4 ולכן גם הxים צריכים להיות יותר קרובים ל-1. ואכן, אם נבחר $\delta = 0.1$ אז נגלה שכל $x \neq 1$ המקיים $0.9 < x < 1.1$ מקיים גם $|f(x) - 4| < 0.5$.

ואפשר להמשיך את התהליך עוד ועוד. לכל מידת קירבה ϵ שנבחר, אפשר למצוא איזשהו δ כך שהתנאי יתקיים: xים שנמצאים במרחק של פחות מ-δ מ-$x_0 = 1$ יקיימו $|f(x) - L| < \epsilon$. הוכחה כללית (שלא באמצעות דוגמאות) תראה שאכן לכל $\epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם $0 < |x-1| < \delta$ אז $|x^2+3-4| < \epsilon$, ולכן $x^2 + 3 \xrightarrow[x\to 1]{} 4$.

הבעיה עם הגדרה 2.1 היא שהיא נוראית. מאוד לא נוח לכתוב את ההוכחה בצורה מפורשת גם עבור פונקציות פשוטות ובטח שלא עבור פונקציות מורכבות יותר. לכן, ננקוט בגישה קצת שונה. במקום לחשב ולהוכיח גבולות ישירות מההגדרה, נזכור שניתן לייצר פונקציות באמצעות פעולות חשבון (ראו פרק 1.2.2) על פונקציות אחרות. לכן, אם נדע איך פעולות חשבון אלו משפיעות על הגבול ואם נדע גבולות של פונקציות פשוטות, ניתן יהיה לחשב גבולות של פונקציות מורכבות יותר. למעשה, בשלב הזה מספיק להשתמש בגבול הבסיסי הבא:

$$\lim_{x\to x_0} x = x_0$$

המתייחס למעשה לפונקציה הפשוטה $f(x) = x$. בנוסף, עבור כל קבוע $C \in \mathbb{R}$ מתקיים $\lim_{x\to x_0} C = C$ מהסיבה הפשוטה שהקבוע כלל לא תלוי ב-x. המשפט הבא מסכם את ההשפעה של פעולות החשבון על הפונקציות:

משפט 2.1 (אריתמטיקה של גבולות)**.** יהיו $f(x), g(x)$ פונקציות המוגדרות בסביבת x_0 כך ש-$\lim_{x\to x_0} f(x) = L_1$ ו-$\lim_{x\to x_0} g(x) = L_2$, $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$. אזי

1. $\lim_{x\to x_0} (f+g)(x) = L_1 + L_2$.
2. $\lim_{x\to x_0} (f-g)(x) = L_1 - L_2$.
3. $\lim_{x\to x_0} (f\cdot g)(x) = L_1 \cdot L_2$.
4. אם $L_2 \neq 0$ אז $\lim_{x\to x_0} (f/g)(x) = L_1/L_2$.
5. אם $C > 0$ אז $\lim_{x\to x_0} C^{f(x)} = C^{L_1}$.
6. אם $L_1 > 0$ אז $\lim_{x\to x_0} (f(x))^C = L_1^C$, כאשר $C \in \mathbb{R}$.
7. אם $L_1 > 0$ אז $\lim_{x\to x_0} (f(x))^{g(x)} = L_1^{L_2}$.

בדוגמא הקודמת, $\lim_{x\to 1} x = 1$ ולכן לפי סעיף 6 של משפט 2.1 (או סעיף 3) נקבל $\lim_{x\to 1} x^2 = 1^2 = 1$. יחד עם סעיף 1 והפונקציה הקבועה $g(x) = 3$, נקבל $\lim_{x\to 1} x^2 + 3 = 1^2 + 3 = 4$, כפי שטענו מלכתחילה.

באופן דומה, נחזור לדוגמא שבה פתחנו את הפרק, $f(x) = \begin{cases} (x-4)^2, & x \neq 5 \\ 2, & x = 5 \end{cases}$, ראו איור 2.1. לפי סעיף 2 הגבול של $x-4$ כאשר $x \to 5$ הוא $5-4=1$ ולפי סעיף 6, הגבול של $(x-4)^2$ הוא $1^2 = 1$. שימו לב שמה שחשוב כאן הוא ההתנהגות של הפונקציה ליד $x = 5$, בעוד שהערך $f(5)$ כלל לא משפיע. כמו כן, שימו לב שבהצבות ובחישובים אנחנו לא מציבים את x_0 בפונקציה עצמה, אלא אנחנו מציבים אותו בגבול הבסיסי ומציבים בביטויים המופיעים במשפט 2.1. כאמור, הצבה של x_0 בפונקציה עצמה היא טעות, שהרי $f(5)$ לא רלוונטי לערך הגבול של $f(x)$ כאשר x מתקרב ל-5.

הפעלה חוזרת של משפט 2.1 והגבול הבסיסי מאפשרת לנו לטפל כמעט בכל הפונקציות האלמנטריות: פולינומים, פונקציות רציונליות, פונקציות מעריכיות (סעיף 5) ושורשים (סעיף 6 עם חזקה לא שלמה). עבור לוגריתמים, נוסיף את הגבול הבסיסי

$$\lim_{x\to x_0} \ln(x) = \ln(x_0)$$

לכל $x_0 > 0$. כך, ניתן לחשב בקלות את הגבולות של כל הפונקציות האלמנטריות, פרט למקרים מיוחדים, למשל פונקציות רציונליות בנקודות בהן המכנה שואף ל-0. במקרים כאלו נצטרך לטפל בזהירות כמו בדוגמא 2.1 או להרחיב את הגדרת הגבול (פרק 2.2).

דוגמא 2.1. חשבו את הגבול $\lim_{x\to 2} \frac{x^2+3x-10}{x^2-4}$.

פתרון. שימו לב שאי אפשר להשתמש באריתמטיקה של גבולות כי הגבול של המכנה הוא 0, והמשפט לא תקף במקרה כזה. יחד עם זאת, נשים לב שמתקיים $\frac{x^2+3x-10}{x^2-4} = \frac{(x-2)(x+5)}{(x-2)(x+2)}$. ועבור $x \neq 2$ ניתן לצמצם ולקבל $\frac{x^2+3x-10}{x^2-4} = \frac{x+5}{x+2}$.

נדגיש - מדובר על פונקציות שונות. הפונקציה המקורית לא מוגדרת עבור $x = \pm 2$ ואילו הפונקציה באגף ימין לא מוגדרת רק עבור $x = -2$. יחד עם זאת, עבור כל x בתחום ההגדרה המשותף שלהן, הזהות שלעיל מתקיימת ובפרט בסביבת $x = 2$ הערכים של הפונקציה המקורית שווים לערכי הפונקציה $\frac{x+5}{x+2}$.

מכאן, לצורך חישוב הגבול ניתן להשתמש בביטוי שקיבלנו, עבורו אריתמטיקה של גבולות כן מתאימה כי הגבול של המכנה ב-2 אינו שווה ל-0. נקבל $x+5 \to 7$ וכן $x+2 \to 4$ ובסה"כ

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+3x-10}{x^2-4} = \frac{7}{4}.$$

■

תרגיל 2.1. חשבו את הגבולות הבאים:

1. $\lim_{x\to 1} \frac{2x^2+x}{(x+3)^2}$
2. $\lim_{x\to 1} f(x)$ כאשר $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2+x}{(x+3)^2} & x \neq 1, \\ 0 & x = 1 \end{cases}$.
3. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+3}{x^2+2}$

4. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x^2+4}$

5. $\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x^2-6x+5}$

ניתן להשתמש ברעיון דומה לאריתמטיקה של גבולות בחישוב גבול של פונקציה מורכבת, אבל צריך לשים לב ששני הגבולות לא מחושבים באותה הנקודה. נתבונן בגבול של הפונקציה $g\circ f$ בנקודה x_0, ונניח כי $\lim_{x\to x_0} f(x)=L$. כאשר x מתקרב ל-x_0, ערכי $f(x)$ מתקרבים ל-L ולכן הערכים שמציבים בתוך g יהיו קרובים ל-L. לכן, עלינו לדעת את הגבול של $g(y)$ כאשר $y\to L$ ולא ב-x_0.

משפט 2.2 (גבול של הרכבה)**.** תהי $g\circ f$ פונקציה המוגדרת בסביבה של x_0. אם $\lim_{x\to x_0} f(x)=L$ ואם $\lim_{y\to L} g(y)=g(L)=M$ אזי $\lim_{x\to x_0} g\circ f(x)=M$.

על משפט 2.2 אפשר לחשוב גם כעל הצבה של משתנה אחר בגבול. למשל, במקום לחשב את הגבול של $(x+3)^2$ בנקודה $x_0=2$, אפשר לחשב את הגבול של y^2 בנקודה $y_0=5$, כאשר $y=x+3$:

$$\lim_{x\to 2}(x+3)^2=\lim_{y\to 5} y^2=25$$

שכן התהליך שביצענו פה היה בעצם לפרק את הפונקציה $(x+3)^2$ להרכבה של שתי פונקציות $g\circ f$ כאשר $f(x)=x+3$ ו-$g(y)=y^2$. נראה שתהליך זה שימושי בהמשך.

2.1 גבולות חד-צדדיים

הגדרת הגבול דורשת שהפונקציה תהיה מוגדרת בסביבה של הנקודה x_0, קרי שתהיה מוגדרת משני הצדדים של הנקודה, גם עבור $x>x_0$ וגם עבור $x<x_0$. אבל, השאלה "מה קורה לפונקציה $f(x)$ כאשר x מתקרב לנקודה x_0?" היא שאלה לגיטימית גם כאשר אין סביבה כזו וניתן להתקרב לנקודה רק מכיוון אחד. למשל, פונקציית השורש $\sqrt{x}$ מוגדרת עבור $x\geq 0$ וכדי לדעת את הגבול ב-$x_0=0$ צריך להתקרב אל 0 רק מהכיוון החיובי של ציר ה-x. באופן דומה, ייתכן והפונקציה מוגדרת אחרת ומתנהגת אחרת בשני הצדדים של x_0. למשל הפונקציה המשורטטת באדום באיור 2.1. במקרים אלו, במקום לדבר על הגבול של הפונקציה בנקודה נדבר על הגבול החד-צדדי של הפונקציה בנקודה, כשהחד-צדדיות מבטאת את העובדה שאנחנו מתקרבים לנקודה רק מכיוון אחד, או מימין ($x>x_0$) או משמאל ($x<x_0$).

הגדרה 2.2 (גבול חד צדדי)**.** תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בתחום (x_0,b) כלשהו, ויהי $L\in\mathbb{R}$. נאמר ש**הגבול מימין** של $f(x)$ ב-x_0 הוא L אם לכל $\epsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שאם $x_0<x<x_0+\delta$ אז $|f(x)-L|<\epsilon$.

במקרה כזה נרשום $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=L$ או $f(x)\xrightarrow[x\to x_0^+]{} L$.

באופן אנלוגי נגדיר את ה**גבול משמאל** עבור פונקציה המוגדרת בתחום (a,x_0) כלשהו, אם לכל $\epsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שאם $x_0-\delta<x<x_0$ אז $|f(x)-L|<\epsilon$.

במקרה כזה נרשום $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=L$ או $f(x)\xrightarrow[x\to x_0^-]{} L$.

הרעיון של הגדרה 2.2 זהה לזה של הגדרה 2.1: כדי להגיד שהגבול של פונקציה (מאיזשהו כיוון) בנקודה x_0 הוא L, עלינו להראות שככל שהאיקסים שנבחר יהיו יותר קרובים ל-x_0 (מהכיוון שבחרנו, מימין או משמאל), כך גם הערכים של הפונקציה יתקרבו ל-L. גם

הפעם, עבודה ישירות עם ההגדרה היא מאוד לא נוחה ובמקום זאת ניתן לעבוד עם חוקי האריתמטיקה של הגבולות

משפט 2.3. כל חוקי האריתמטיקה של הגבולות (משפט 2.1) תקפים גם בגבולות חד-צדדיים יחד עם הגבול החד-צדדי

$$\lim_{x\to x_0+} x = \lim_{x\to x_0^-} x = x_0$$

לכל $x_0 \in \mathbb{R}$, והגבול

$$\lim_{x\to x_0+} \ln x = \lim_{x\to x_0^-} \ln x = \ln x_0$$

עבור $x_0 > 0$.

כמסקנה (אם כי לא מיידית), נקבל $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$.

כאשר לפונקציה קיים גבול (במובן הרגיל) קיימים לה גם הגבולות החד-צדדיים: אם כאשר x מתקרב ל-x_0 אז $f(x)$ מתקרב ל-L, אז בוודאי שגם כאשר x מתקרב ל-x_0 רק מימין (או רק משמאל) אז $f(x)$ מתקרב ל-L. ההפך הוא גם נכון. אם לפונקציה קיימים הגבולות החד-צדדיים בנקודה מסויימת **והם שווים**, אז לפונקציה קיים גבול בנקודה.

דוגמא 2.2. חשבו את הגבול $\lim_{x\to 1} f(x)$ עבור $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \le 1 \\ \frac{3x^2-4x+1}{x-1}, & x > 1 \end{cases}$.

פתרון. בתחום $x < 1$ מתקיים $f(x) = x+1$ ולכן $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x+1 = 2$. בתחום $x > 1$ מתקיים $f(x) = \frac{3x^2-4x+1}{x-1} = \frac{(3x-1)(x-1)}{x-1} = 3x-1$ ולכן $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} 3x-1 = 2$. מאחר ומתקיים $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = 2$ אז גם הגבול קיים ומתקיים $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$. ■

דוגמא 2.3. חשבו את הגבול $\lim_{x\to 0} f(x)$ עבור $f(x) = \begin{cases} x+2, & x < 0 \\ x, & x \ge 0 \end{cases}$.

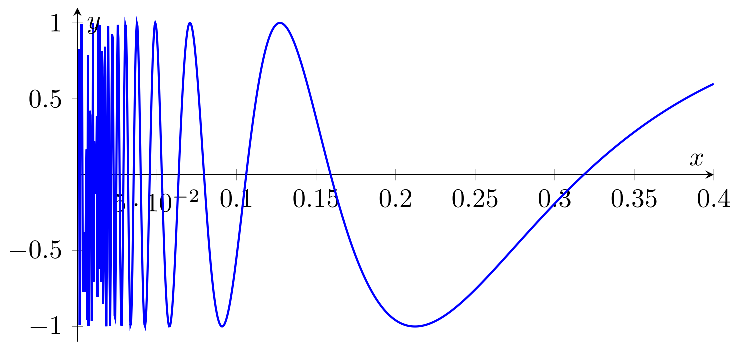
פתרון. מתקיים $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x = 0$ וכן $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x+2 = 2$. מאחר והגבולות החד צדדיים שונים, לא קיים הגבול $\lim_{x\to 0} f(x)$. ■

הדוגמא האחרונה ממחישה מצב שבו לפונקציה אין גבול: הגבולות החד-צדדיים קיימים אבל הם שונים, ולכן כאשר x מתקרב ל-0 ערכי הפונקציה מתקרבים בו זמנית לשני ערכים: ל-0 כאשר האיקסים חיוביים ול-2 כאשר הם שליליים. הפונקציה המשורטטת באדום באיור 2.1 ממחישה מצב דומה: כאשר הפונקציה מתקרבת ל-4, כיוון ההתקרבות (משמאל או מימין) משפיע על הערך אליו הפונקציה מתקרבת, כך שהגבול (במובן הרגיל הדו-צדדי) לא קיים.

אי קיום גבול בגלל שהגבולות החד-צדדיים שונים הוא התרחיש הנפוץ בכלכלה ומתאר מצב בו משהו קרה בנקודה x_0 ששינה את האופן בו $f(x)$ מתנהגת כך שנוצרה "קפיצה". למשל, רגע אחרי שנגיד בנק ישראל מפרסם את החלטתו בנוגע לשער הריבית, המשק כולו מגיב להכרזה ואנו עשויים לראות ששערי חליפין קצת אחרי ההכרזה וקצת לפני ההכרזה יהיו שונים משמעותית.

סיבה נוספת (אך נדירה יותר בכלכלה) לאי קיומו של גבול הוא מצב שבו לפחות אחד מגבולות החד-צדדיים לא קיים. זה קורה כאשר הפונקציה $f(x)$ מתקרבת בו-זמנית לשני

ערכים שונים מאותו הצד, כמוראה באיור 2.2[1] בכל סביבה ימנית של $x = 0$, יש נקודות עבורן הפונקציה שווה ל-1 ונקודות אחרות עבורן הפונקציה שווה ל--1, והפונקציה נעה בין הנקודות הללו הלוך ושוב. ככל שמתקרבים יותר ל-0 כך התנועה הזו נעשית מהירה יותר ובכל קטע מהצורה $(0, \delta)$ תמיד נמצא x שעבורו $f(x) = 1$ ו-x אחרי שעבורו $f(x) = -1$. לכן הפונקציה לא מתקרבת לאף ערך יחיד, הגבול מימין ב-0 לא קיים וכמובן גם לא הגבול הדו-צדדי ב-0.



איור 2.2: פונקציה ללא גבול ב-$x = 0$. בקרבת 0, הפונקציה לא מתקרבת לאף ערך סופי אלא נעה בין $+1$ ל--1.

תרגיל 2.2. חשבו את הגבולות הבאים:

1. $\lim_{x\to 5^+} \frac{x-5}{\sqrt{x^2-25}}$.
2. $\lim_{x\to 2} f(x)$ כאשר $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2.5, & x \le 2 \\ x/2 + 1/x, & x > 2 \end{cases}$.

2.2 גבולות אינסופיים

הגבולות שעסקנו בהם עד כה היו גבולות סופיים בשני ההיבטים: x התקרב לערך סופי, כלומר למספר ממשי x_0 וגם הערכים של הפונקציה התקרבו למספר סופי כלשהו L. נרחיב את ההגדרה ונרשה לכל אחד מאלו להיות אינסופיים, כלומר נרצה לבדוק מה קורה לערכים של הפונקציה כאשר x מאוד גדול ("שואף לאינסוף") או מאוד קטן ("שואף למינוס אינסוף") וננתח פונקציות אשר יכולות לקבל ערכים מאוד גדולים או מאוד קטנים ("הפונקציה שואפת לאינסוף או למינוס אינסוף"). נתחיל מהסוג הראשון, שהינו פשוט יותר מבין השניים.

הגדרה 2.3 (גבול באינסוף)**.** תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בתחום (b, ∞) כלשהו ויהי $L \in \mathbb{R}$. נאמר שהגבול של הפונקציה כאשר x שואף לאינסוף הוא L אם לכל $\epsilon > 0$ קיים M כך שאם $x > M$ אז $|f(x) - L| < \epsilon$ ונרשום $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ או $f(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} L$.

באופן דומה, נגדיר את הגבול במינוס אינסוף.

תרגיל 2.3. רשמו בצורה מדוייקת את הגדרת הגבול כאשר $x \to -\infty$.

[1] להעשרה, זוהי הפונקציה $\sin(1/x)$.

הסוג הזה של שאיפה לאינסוף הוא נוח כי כאן רק ערכי ה-x הם אלו ששואפים לאינסוף ולכן גדולים מאוד, אך הפונקציה עצמה מתכנסת לערך סופי. לכן, ניתן להמשיך ולחשב גבולות באמצעות אריתמטיקה של גבולות, שכן שני הגבולות המופיעים במשפט 2.1, קרי L_1, L_2, הם מספרים ממשיים ומפעילים עליהם את פעולות החשבון הרגילות. ההבדל המרכזי הוא שהגבולות הבסיסיים בהם נשתמש הם שונים מאלו שאיתם עבדנו עד כה. ראשית, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$, שהרי ככל ש-$x$ גדול יותר, אז ההפכי שלו קטן מאוד ומתקרב ל-0. באופן דומה, $\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$. בנוסף, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ ובאופן כללי לכל $a > 1$ מתקיים $a^x \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$ ולכן לכל $0 < b < 1$ יתקיים $b^x \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$ (הכפלה של מספר קטן מ-1 בעצמו מקטינה אותו, לכן אם נעשה זאת אינסוף פעמים נקבל 0).

דוגמא 2.4. חשבו את הגבול $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4x^2-x}-x}{x-3}$.

פתרון. כדי להשתמש באריתמטיקה של גבולות, נוציא מחוץ לסוגריים את החזקה הגבוהה ביותר במונה ובמכנה ונצמצם:

$$\frac{\sqrt{4x^2-x}-x}{x-3} = \frac{x\sqrt{4-1/x}-x}{x(1-3/x)} = \frac{\sqrt{4-1/x}-1}{1-3/x}$$

נחשב את המונה והמכנה בנפרד. הגבול של המונה הינו $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{4-1/x}-1 = 1$ מאחר ו-$\sqrt{4-1/x} \xrightarrow[x\to\infty]{} \sqrt{4}$. הגבול של המכנה הינו $\lim\limits_{x\to\infty} 1-3/x = 1$ ובאמצעות אריתמטיקה של גבולות נקבל שהגבול כולו הינו $1/1 = 1$. ■

תרגיל 2.4. חשבו את הגבולות הבאים:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x-1}{2x+3}$
2. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^2-22x+7.5}{6x^2+10x}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x}-x$

   שימו לב שאת הגבול הזה אי אפשר לחשב ישירות על ידי הפרש של גבולות כי המחסר והמחוסר לא שואפים למספר סופי. במקום זאת, נסו לכפול ולחלק את הפונקציה בביטוי "הצמוד" $\sqrt{x^2+x}+x$ ולהמשיך כמו בסעיפים הקודמים.

הסוג השני של השאיפה לאינסוף היא שאיפה של הפונקציה לאינסוף כאשר x שואף לערך סופי. למשל הפונקציה $f(x) = 1/x^2$ המוגדרת לכל $x \neq 0$. ככל ש-x מתקרב ל-0, כך המכנה קטן ומתקרב ל-0, ולכן החלוקה בו נותנת מספר מאוד גדול. במקרה כזה נרשום $\lim\limits_{x\to0} \frac{1}{x^2} = \infty$.

הגדרה 2.4 (גבול אינסופי). תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבת נקודה x_0. הגבול של הפונקציה ב-x_0 הוא אינסוף אם לכל $M > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם $0 < |x-x_0| < \delta$ אז $f(x) > M$. במקרה כזה נרשום $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ או $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \infty$.

ההגדרה לגבולות חד-צדדיים בנקודה ולכך שהגבול הוא מינוס אינסוף זהה פרט לשינויים המתבקשים.

ניסוח חוקי האריתמטיקה של גבולות במקרה זה מצריך יותר זהירות, שכן הפעם התוצאה של הגבול היא אינסוף ולא מספר ממשי ופעולות החשבון מוגדרות רק בין מספרים ממשיים ולא בין אינסופים. יחד עם זאת, במקרים מסויימים התוצאה ברורה. "אינסוף ועוד אינסוף שווה אינסוף" שכן אם מחברים מספר מאוד גדול למספר מאוד גדול אחר, מקבלים מספר מאוד גדול. עבור מקרים ברורים אלו, ננסח את כללי האריתמטיקה של הגבולות:

משפט 2.4 (אריתמטיקה של גבולות אינסופיים)**.** יהיו $f(x), g(x)$ פונקציות המוגדרות בסביבת הנקודה x_0 ונניח כי $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$. מתקיים:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} (f+g)(x) = \infty$.
2. $\lim\limits_{x\to x_0} (f\cdot g)(x) = \infty$.
3. אם $C > 1$ אזי $\lim\limits_{x\to x_0} C^{f(x)} = \infty$.
4. אם $0 < C < 1$ אזי $\lim\limits_{x\to x_0} C^{f(x)} = 0$.
5. אם $C > 0$ אזי $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x))^C = \infty$.

והגבולות הבסיסיים בהם נשתמש הם $\lim\limits_{x\to 0^+} 1/x = \infty$, $\lim\limits_{x\to 0^-} 1/x = -\infty$ וכן $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$.

תרגיל 2.5. רשמו את המקבילה של משפט 2.4 עבור המקרה בו $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty$.

הערה: כל הגבולות במשפט 2.4 ובתרגיל 2.5 נכונים גם כאשר $x_0 = \pm\infty$, כלומר כאשר x שואף לאינסוף או למינוס אינסוף.

שימו לב שחלק מהגבולות נעדרים ממשפט 2.4. כששתי פונקציות שואפות לאינסוף, ברור שגם הסכום שלהן הוא מספר מאוד גדול ששואף לאינסוף. אבל מה לגבי ההפרש ביניהן? המחסר שואף לאינסוף ו"מנסה להגדיל את הביטוי" בעוד שהמחוסר שואף לאינסוף ולכן "מנסה להקטין את הביטוי", ולא ברור איזה מהם "מנצח" ולאן ההפרש הולך. קל לראות זאת עם הגבול הבא: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^m}{x^n}$ כאשר $m, n > 0$. המונה שואף לאינסוף ורוצה להגדיל את הביטוי, המכנה שואף לאינסוף ושואף להקטין את הביטוי. כאשר $m > n$ הביטוי מצטמצם בצורה כזו שהמכנה נעלם ומה שנשאר הוא רק x בחזקת משהו חיובי במונה, ובגבול $x \to \infty$ שואף גם כן לאינסוף. באופן דומה, כאשר $m < n$ המונה הוא זה שנעלם ונשאר אחד חלקי x בחזקת משהו במכנה, ביטוי ששואף ל-0 כאשר $x \to \infty$. לבסוף, במקרה בו $m = n$, המונה והמכנה שואפים לאינסוף "באותה המהירות", ובעצם מצטמצמים והגבול שווה ל-1. מסיבה זו, לא ניתן לחזות מראש לאן ישאף גבול מהצורה "אינסוף חלקי אינסוף". להלן רשימה של גבולות נוספים מאותו סגנון, אשר לא ניתן לדעת לאן הם שואפים באופן פשוט:

$$"\infty - \infty" \qquad "\frac{\infty}{\infty}" \qquad "1^{\infty}" \qquad "\frac{0}{0}" \qquad "\infty^0" \qquad "0^0"$$

ודאו שאתם מבינים איזו בעיה יכולה להיווצר בכל אחד מהביטויים הללו!

דוגמא 2.5. חשבו את הגבול $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ כאשר

1. $f(x) = \frac{(x+1)(2x-3)(4x-4)+3}{x}$.
2. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$.

פתרון. במקרה הראשון, המונה שואף ל-$15 = 3 + 12$ אבל לביטוי כולו אין גבול. כאשר $x \to 0^+$ מחלקים את המונה במספר קטן מאוד וחיובי ומקבלים גבול שהוא אינסוף, ואילו כאשר מחלקים את המונה במספר קטן מאוד ושלילי מקבלים גבול שהוא אינסוף. לכן $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \infty, \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ והגבול כאשר $x \to 0$ לא קיים.

במקרה השני גם המונה וגם המכנה שואפים ל-0 ולכן אי אפשר להשתמש באריתמטיקה של גבולות כי לא ברור איזה 0 "חזק יותר". בכדי להגיע לגבול מצורה שמתאימה למשפט, נכפול ב"צמוד" של המכנה:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} = \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} \cdot \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{(x+1)-1} = \sqrt{x+1}+1$$

ולכן $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 2$. ■

תרגיל 2.6. חשבו את הגבולות הבאים

1. $\lim\limits_{x\to 1/2} \frac{8x^2-2x-1}{4x^2-8x+3}$.
2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$.
3. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{1-x^3}$.
4. $\lim\limits_{x\to 3} 2^{\frac{1}{x-3}}$.

נקודה חשובה שכדאי לשים אליה לב היא שאי אפשר לעשות גבול "בחלקים". אריתמטיקה של גבולות (למשל, עבור מכפלה) קובעת שאם שני הגבולות קיימים וסופיים, אז גם קיים הגבול של מכפלת הפונקציות. אי אפשר לחשב את אחד הגבולות בנפרד, להציב אותו ולהמשיך הלאה. למשל, אי אפשר להשתמש בעובדה ש- $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$ בכדי לבצע את הפירוק הבא:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} = 0 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+1}-1} = 0$$

2.2.1 אסימפטוטות וקצב גידול

כאשר הפונקציה שואפת לאינסוף בנקודה מסויימת (אפשר גם חד-צדדית) בהתאם להגדרה 2.4, נאמר שהישר $x = x_0$ מהווה **אסימפטוטה אנכית** של $f(x)$ בנקודה x_0. לדוגמא, לפונקציה $f(x) = 1/x$ יש אסימפטוטה אנכית בנקודה $x = 0$.

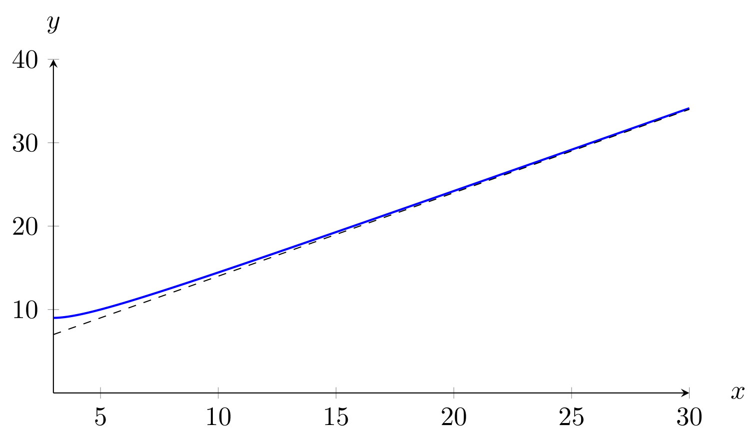
הגבול של $f(x)$ כאשר $x \to \infty$ (או $x \to -\infty$) גם נקרא אסימפטוטה, וכאשר הגבול קיים וסופי נאמר שלפונקציה יש **אסימפטוטה אופקית** באינסוף. למשל, הישר $y = 0$ הוא אסימפטוטה אופקית של הפונקציה $f(x) = 1/x$ באינסוף. בשני המקרים שתוארו לעיל, המשמעות שישר כלשהו הוא אסימפטוטה של הפונקציה היא שהפונקציה הולכת ומתקרבת אל הישר ככל ש-x מתקרב ל0 או לאינסוף, בהתאמה.

אבל כאשר $x \to \infty$ הפונקציה יכולה להתקרב לא רק לישר אופקי מהצורה $y = 0$ (או כל קבוע אחר) אלא גם לישרים משופעים או לפונקציות אחרות. לדוגמא, נתבונן בפונקציה

$f(x)=\frac{x^2+3x}{x-1}$, המקיימת $f(x)\xrightarrow[x\to\infty]{}\infty$. הפונקציה שואפת לאינסוף באינסוף, ואנחנו רוצים לקבוע באיזה אופן היא שואפת לאינסוף, כלומר למצוא פונקציה פשוטה יותר המתארת את ההתנהגות שלה באינסוף. נגדיר $g(x)=x+4$ ונחשב לאן שואף ההפרש $f(x)-g(x)$:

$$f(x)-g(x)=\frac{x^2+3x}{x-1}-(x+4)=\frac{x^2+3x-(x^2+3x-4)}{x-1}=\frac{4}{x-1}$$

ולכן $\lim_{x\to\infty} f(x)-g(x)=0$. כלומר, עבור xים גדולים מאוד, הפונקציה $f(x)$ היא בערך הקו הישר $g(x)$ ומתנהגת כמוהו באינסוף, ראו איור 2.3.



איור 2.3: הפונקציה $f(x)=\frac{x^2+3x}{x-1}$ (בכחול) המתנהגת עבור ערכים מאוד גדולים של x כמו הפונקציה הלינארית $g(x)=x+4$ (שחור).

במצב כזה, כאשר הפונקציה מתנהגת כמו קו ישר באינסוף, נאמר שלפונקציה יש **אסימפטוטה משופעת**, כלומר קיימים קבועים a,b כך שהפונקציה באינסוף מתנהגת כמו הישר $ax+b$ ולכן המרחק ביניהם שואף לאפס: $(f(x)-(ax+b))\xrightarrow[x\to\infty]{}0$. במקרה כזה, גם $(f(x)-(ax+b))/x\xrightarrow[x\to\infty]{}0$ ומחשבון גבולות נקבל

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x},\qquad b=\lim_{x\to\infty}f(x)-ax.$$

באופן רחב יותר, נאמר ש-$f(x)$ מתנהגת באינסוף כמו הפונקציה $g(x)$ אם קיים קבוע $\mathbb{R}\ni a\neq 0$ כך ש: $a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$. במקרה כזה נרשום ש-$f(x)$ היא $\Theta(g(x))$ והמשמעות היא ש-$f(x)$ מתנהגת כמו $g(x)$ באינסוף (עד כדי כפל בקבוע). לרוב נעשה את זה עם פונקציות מאוד פשוטות, למשל $g(x)=x^n,e^x,\ln(x)$ כי למעשה מה שחשוב לנו הוא קצב הגידול של הפונקציה באינסוף, ולאו דווקא הפרטים הקטנים והטכניים של ההתנהגות שלה.

סימון זה מגיע ממדעי המחשב ורלוונטי בעיקר לבעיות שנמצאות על התפר שבין כלכלה למחשבים, למשל בעיות של זמן ריצה, קרי כמה זמן לוקח לבצע חישוב מסויים. למשל, נניח שאנחנו משווקים מוצר מסויים באמצעות שיווק ויראלי (מפה לאוזן) ברשת חברתית כלשהי, וצריכים לנתח את הרשת החברתית ולבדוק מי המשפיענים הכי מרכזיים שכדאי לנו להתחיל מהם, מה מידת ההשפעה שלהם וכתוצאה מכך גם כמה שווה לשלם להם כדי לפרסם את המוצר.

לשם כך, כתבנו תוכנת מחשב שמנתחת את הרשת החברתית ועונה על כל השאלות הללו, ונסמן ב-$f(x)$ את הזמן שלוקח לה להגיע לתשובה כאשר ברשת יש x אנשים (ככל שיש יותר אנשים, לוקח יותר זמן לנתח את הרשת). בדקנו שהתוכנה עובדת נפלא על המחשב שלנו על רשתות דמה שכוללות $x = 100$ אנשים ואנחנו מוכנים להפעיל אותה על הרשת האמיתית, שכוללת מיליון אנשים (כלומר פי $10,000$ אנשים מאשר קודם). אם $f(x)$ היא $\Theta(x)$, אזי $f(x)$ מתנהגת בערך כמו קו ישר, וכאשר מגדילים את ה-x של קו ישר פי $10,000$ גם ה-y יגדל פי $10,000$, כלומר למחשב יקח פי $10,000$ יותר דקות לנתח את הרשת האמיתית מאשר את הרשת המדומה. זה כנראה לא נורא. אבל אם $f(x)$ היא למעשה $\Theta(2^x)$, זמן הריצה יגדל כמו חזקה הגדלה הרבה יותר מהר ונקבל $\frac{f(1{,}000{,}000)}{f(100)} \sim \frac{2^{1{,}000{,}000}}{2^{100}}$. המספר הזה הוא עצום והגידול בזמן הריצה יהיה כל כך גדול שהמחשב לא יסיים את החישוב בתקופת חיינו. כתוצאה מכך, אין אפשרות לפתור את הבעיה בצורה מדוייקת ונצטרך לחשוב על תוכנת מחשב ועל פתרון מקורב לבעיה, שבו אמנם לא נמצא את המשפיענים הכי נכונים שמהם כדאי להתחיל ונספוג כתוצאה מכך עלות פרסום גבוהה יותר, אבל לפחות נוכל לעשות משהו במקום לחכות נצח עד שהחישוב יסתיים.

תרגיל 2.7. חשבו את כל האסימפטוטות של הפונקציה $f(x) = \frac{2x}{x-1}$.

2.3 הגבול של אוילר

בפרק זה נחשב גבול מהצורה "1^∞". כפי שראינו בפרק הקודם, גבול זה לא ניתן לחישוב באמצעים רגילים של אריתמטיקה של גבולות אינסופיים: אם $f \to 1$ ו-$g \to \infty$, לא ברור מי מנצח ומה הגבול של הביטוי f^g. מחד, בסיס החזקה f שואף ל-1 ובחזקת כל דבר רוצה להיות 1, ומאידך המעריך g שואף לאינסוף ורוצה להביא את הביטוי לאינסוף או ל-0, תלוי בבסיס. לכן, כאשר הבסיס שואף ל-1 והמעריך לאינסוף, לא ברור מי מהם מנצח, והגבול של אוילר יהיה שימושי בחישוב גבולות מהצורה הזו.

הגבול של אוילר מופיע בצורה טבעית בכלכלה בהקשר של חישובי ריבית. נניח שאדם משקיע שקל אחד בעבור ריבית שנתית קבועה של $r > 0$. אם הריבית משולמת בסוף התקופה, הרי שכעבור שנה ההשקעה שלו תהיה שווה $1 + r$.

כעת נניח כי הריבית משולמת כל חצי שנה באופן יחסי, דהיינו ריבית של $r/2$ לכל חצי שנה. כמקודם, כעבור חצי שנה ההשקעה שלו תהיה שווה $1 + r/2$. סכום זה הוא סכום ההשקעה החדש עבור חצי השנה השנייה וכעבור חצי שנה ההשקעה תהיה שווה ל-$(1+r/2)^2$. שימו לב שהריבית ששולמה בתקופה הראשונה הצטרפה לקרן ונשאה ריבית בתקופה השנייה, תופעה הנקראת **ריבית דריבית**.

מה יקרה אם נחלק את השנה לעוד חלקים? אם נעבור לחישוב חודשי, אזי הריבית בכל חודש תהיה $r/12$ ולכן שווי ההשקעה הכוללת לאחר שנה יהיה $(1+r/12)^{12}$. אם נחלק את השנה לפרקי זמן הולכים וקצרים, הריבית בכל פרק זמן תהיה קטנה מאוד ולכן הבסיס יהיה קרוב מאוד ל-1 אבל החזקה תהיה גדולה מאוד, וזהו בדיוק גבול מהצורה "1^∞". בעזרתו הנדיבה של לאונרד אויילר מהמאה ה-18, אנחנו יודעים לחשב גבול זה:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^n = e^r$$

כאשר $e = 2.71\ldots$ מוכר לנו כבר מפונקציית האקספוננט.

באמצעות משפט 2.2 ניתן להכליל את הגבול של אויילר גם למצבים בהם במקום n מופיעה פונקציה. במקרה כזה, צריך לאותה הפונקציה תהיה גם במכנה וגם במעריך כדי שניתן יהיה להשתמש בגבול של אוילר ולקבל 1:

משפט 2.5. נניח כי $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$. אזי $\lim_{x\to x_0}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e$.

דוגמא 2.6. חשבו את הגבול $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{r}{x^2}\right)^x$, כאשר $r>0$.

פתרון. בכדי להשתמש במשפט 2.5 נכפול ונחלק את המעריך בביטויים המתאימים כך שהגבול יהיה מהצורה המתאימה לגבול של אוילר. המטרה היא שבסופו של התהליך המעריך יהיה ההפכי של הביטוי שמתווסף ל-1 כפול עוד כל מיני דברים:

$$\left(1+\frac{r}{x^2}\right)^x=\left(1+\frac{r}{x^2}\right)^{\frac{x^2}{r}\cdot\frac{r}{x}}=\left[\left(1+\frac{r}{x^2}\right)^{\frac{x^2}{r}}\right]^{\frac{r}{x}}$$

הביטוי בתוך הסוגריים המרובעים מתאים לביטוי המופיע במשפט 2.5 עם $f(x)=x^2/r$ ואילו החזקה הנוספת שואפת ל-0 כאשר $x\to\infty$. מאריתמטיקה של גבולות (משפט 2.1) נקבל שהגבול כולו שואף ל-$e^0=1$. ■

תרגיל 2.8. חשבו את הגבולות הבאים:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{r}{x}\right)^x$, כאשר $r>0$.
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{r}{x}\right)^{x^2}$.
3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+2)-\ln(2)}{x}$.
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{x^2+2x+1}{x}\right)^x$.

2.4 משפט הסנדוויץ'

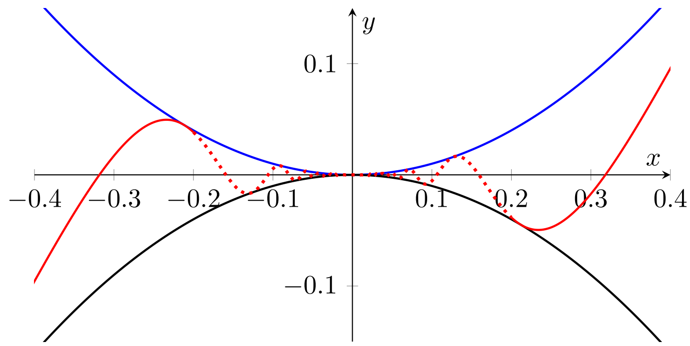
נסיים את הפרק בדיון על ההשפעה של גבולות על אי-שיוויונים. נניח שבסביבה של x_0 מתקיים $f(x)>0$ וכן קיים הגבול $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=L$. האם בהכרח גם $L>0$, כלומר האם פונקציה שהיא חיובית סביב נקודה מסויימת, גם הגבול שלה יהיה חיובי? התשובה היא לא: עבור $f(x)=x^2$ ו-$x_0=0$, הפונקציה חיובית בסביבה של 0 (זיכרו, הנקודה x_0 היא לא חלק מהסביבה והערך של הפונקציה שם אינו משנה לעניין הגבול!) אבל הגבול הוא 0. יחד עם זאת, ברור שהגבול לא יכול להיות שלילי. אם $L<0$ אז בסביבה מספיק קרובה ל-x_0 הערכים של הפונקציה צריכים להיות קרובים ל-L ולכן הם יהיו גם שליליים, בניגוד לנתון. המסקנה היא שגבולות מחלישים את האי-שיוויון מאי-שיוויון חזק לאי-שיוויון חלש.

משפט 2.6. תהי $f(x)$ פונקציה ממשית ונניח כי קיים וסופי $L=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$. נניח כי קיים $M\in\mathbb{R}$ כך ש $f(x)>M$ לכל x **בסביבת** x_0. אזי $L\geq M$.
באופן אנלוגי, אם $f(x)<M$ אז $L\leq M$.

אפשר להכליל את הרעיון גם כאשר חוסמים את $f(x)$ עם פונקציה אחרת במקום עם הקבוע M. במקרה כזה, אם $f(x)<g(x)$ באיזושהי סביבה של x_0 ואם הגבולות קיימים, אז הגבול של $f(x)$ ב-x_0 יהיה קטן מהגבול של $g(x)$ שם. הדרך המקובלת לנסח את הטענה היא באמצעות משפט הסנדוויץ', שבו $f(x)$ כלואה בין שתי פונקציות להן אותו הגבול ב-x_0. מאחר ו-$f(x)$ נמצאת בין שתי הפונקציות, הגבול שלה בנקודה x_0 חייב להיות הגבול המשותף (ראוי איור 2.4).

משפט 2.7 (משפט הסנדוויץ'). תהייה f, g, h פונקציות ממשיות המקיימות $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ לכל x בסביבה כלשהי של x_0. אם קיימים הגבולות $\lim_{x \to x_0} h(x) = L_1$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = L_2$ ואם $L_1 = L_2$ אז קיים הגבול של $f(x)$ ב-x_0 ומתקיים $\lim_{x \to x_0} f(x) = L_1$.

הרעיון של ה"סנדוויץ'" מומחש חלקית באיור 2.4: הפונקציה האדומה לכודה בין שתי "פרוסות הלחם", הפונקציות הכחולה והשחורה. אם שתי פרוסות הלחם הולכות לאותו המקום, אז גם פרוסת הנקניק הלכודה ביניהן הולכת לאותו המקום. אין דרך להמשיך את השרטוט של הפונקציה האדומה (החלק המקווקו) כך שיהיה בין הכחולה והשחורה אבל שהגבול לא יהיה הגבול המשותף שלהן.



איור 2.4: הדגמה של משפט הסנדוויץ'. הפונקציה האדומה נמצאת בין הכחולה לשחורה ולשתיהן הגבול ב-$x_0 = 0$ הוא 0. לכן אין לפונקציה האדומה ברירה ולא משנה איך נמשיך את החלק המקוקוו, היא חייבת גם לשאוף ל-0 שם.

דוגמא 2.7. חשבו את הגבול $\lim_{x \to 0} x^2 e^{-1/x^2}$.

פתרון. נגדיר $f(x) = x^2 e^{-1/x^2}$ ונשים לב כי לכל x מתקיים $f(x) \geq 0$. בנוסף, מאחר ו-$e^y < 1$ לכל $y < 0$, מתקיים $e^{-1/x^2} < 1$ ולכן $f(x) < x^2$. לסיכום: $0 \leq f(x) \leq x^2$.
מאחר ושתי הפונקציות החוסמות שואפות ל-0 כאשר $x \to 0$, אז גם $f(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$. ■

בשינויים המתבקשים, משפט הסנדוויץ' עובד גם לגבולות אינסופיים, רק שבמקרה כזה פרוסה אחת מיותרת. אם $f(x) \geq h(x)$ בסביבת x_0 ואם $h(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \infty$ אז גם $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \infty$.

בעזרת משפט הסנדוויץ' אפשר אם כך לחשב גם גבולות שנראים כמו אריתמטיקה של גבולות אבל לא מתאימים למשפט זה. למשל, נניח כי $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \infty$ ו-$g(x) \geq 1$ בסביבת x_0. נגדיר $h(x) = f(x) \cdot g(x)$. אזי גם $h(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \infty$ שכן $h(x) \geq f(x)$. שימו לב שלא ניתן להשתמש פה במשפטי אריתמטיקה של גבולות כי כלל לא נתון שיש גבול ל-$g(x)$ ולכן $h(x)$ היא לא מכפלה של שתי פונקציות שיש להן גבול.

2.5 תרגילים מסכמים

תרגיל 2.9. חשבו את הגבול $\lim_{x \to 0} \frac{x^2+5x}{2x+3}$.

תרגיל 2.10. חשבו את הגבול $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{4x+1}-\sqrt{5x-1}}$.

תרגיל 2.11. חשבו את הגבול $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6}$.
רמז: אם $x=1$ מאפס פולינום ממעלה שלישית, ניתן לרשום אותו כתור $(x-1)(ax^2+bx+c)$.

תרגיל 2.12. חשבו את הגבול $\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{\sqrt{x^2-9}}{|3-x|}$.

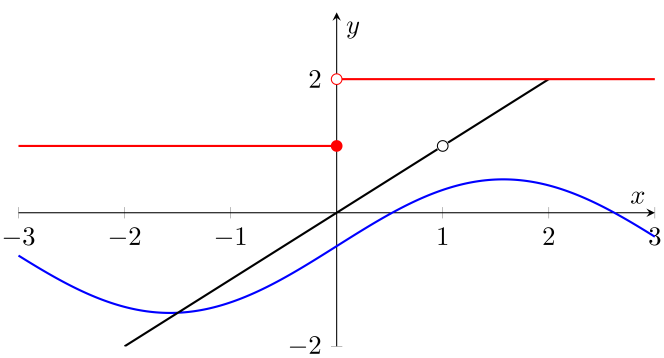
3 רציפות

במושג הגבול התרכזנו בהתנהגות של הפונקציה סביב נקודה מסויימת אך לא בנקודה עצמה. לדוגמא, כפי שהומחש באיור 2.1, הגבול של הפונקציה הכחולה ב-$x_0 = 5$ נגזר מההתנהגות של הפונקציה ליד הנקודה אבל לא מערך הפונקציה $f(5)$, שיכולה להיות בכלל לא מוגדרת בנקודה $x_0 = 5$. בפרק הזה נוסיף את ההתייחסות לערך של הפונקציה בנקודה ונגדיר פונקציה רציפה בנקודה אם הגבול שלה בנקודה שווה לערך הפונקציה בנקודה.

הגדרה 3.1. תהי $f(x)$ פונקציה ממשית המוגדרת בסביבת הנקודה $x_0 \in \mathbb{R}$. הפונקציה **רציפה בנקודה** x_0 אם מתקיימים שלושת התנאים הבאים:

1. הפונקציה מוגדרת בנקודה x_0.
2. הגבול $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ קיים וסופי.
3. ערך הפונקציה שווה לגבול: $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

הרעיון האינטואיטיבי של רציפות בנקודה הוא שגרף הפונקציה בסביבת הנקודה x_0 הוא גרף רציף וניתן לשרטט את הפונקציה על דף נייר "בלי להרים את היד מהדף", כלומר בלי קפיצות ובלי חורים. באיור 3.1 מוצגות שלוש אפשרויות. הפונקציה הכחולה רציפה בכל נקודה וניתן לשרטט אותה בלי להרים את היד מהנייר. הפונקציה השחורה לא רציפה בנקודה $x = 1$ כי היא לא מוגדרת שם ויש "חור" בפונקציה. הפונקציה האדומה לא רציפה בנקודה $x = 0$ כי הגבול לא קיים בנקודה ויש "קפיצה" בערך הפונקציה.



איור 3.1: דוגמא לפונקציה רציפה (כחולה) ושתי פונקציות לא רציפות. הפונקציה השחורה לא רציפה בנקודה $x = 1$ כי היא לא מוגדרת שם והפונקציה האדומה לא רציפה בנקודה $x = 0$ כי הגבול לא קיים שם.

אפשרות אחרת היא לחשוב על פונקציה רציפה בתור פונקציה שלא משתנה "מהר מדי". אם הפונקציה רציפה בנקודה x_0 אז ערכי הפונקציה ליד x_0 קרובים מאוד לערך הפונקציה ב-x_0. לכן, אם נסתכל על נקודה $x' \neq x_0$ אבל מאוד קרוב ל-x_0, אז יתקיים ש-$f(x')$ מאוד קרוב ל-$f(x_0)$. כלומר שינוי קטן בקלט של הפונקציה גורר שינוי קטן בפלט של הפונקציה. זה נכון עבור הפונקציה הכחולה באיור 3.1 אבל לא עבור הפונקציה האדומה, עבורה שינוי קטן מ--0.0001 ל-$+0.0001$ גורר קפיצה גדולה של 1 בערך של הפונקציה.

פונקציות רציפות הן הפונקציות העיקריות המופיעות בטבע בכלל ובכלכלה בפרט, שכן לרוב התהליכים יש אופי רציף. נניח למשל ש-x הוא משקל של קמח (בקילוגרמים) ו-$f(x)$

הוא המחיר. באופן טבעי, $f(3.9)$ די קרוב ל-$f(4)$, ואילו $f(3.99)$ קרוב עוד יותר. ככל שמשקל הקמח שברשותנו קרוב יותר ל-4 קילוגרם, כך מחירו יותר קרוב למחיר של 4 קילוגרם קמח, וזו בדיוק המהות של הרציפות: $\lim_{x\to 4} f(x) = f(4)$.

בהקשר זה, נקודות אי-רציפות עשויות להיות מעניינות ביותר. למשל, נניח ש-x הוא משקל של יהלום (בקאראט) ו-$f(x)$ מחירו. מסתבר ש-$f(0.48)$ יחסית קרוב ל-$f(0.49)$ אבל רחוק מאוד מ-$f(0.5)$, ויש אי-רציפות (קפיצה) מעניינת במחיר היהלום ב-$x = 0.5$ קאראט. הסיבה לכך היא פסיכולוגית ומזכירה את זה שבסופר מחיר של 4.99 מרגיש זול יותר מאשר 5.00 ושציון של 90 מרגיש גבוה משמעותית מ-89, ביחס להפרש בין 89 ל-88.

דוגמא 3.1. האם הפונקציות הבאות רציפות בנקודה $x_0 = 0$?

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \le 0 \\ x+2, & x > 0 \end{cases}; \qquad g(x) = x^2 + 6$$

פתרון. מתקיים $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0 \ne 2 = \lim_{x\to 0^+} f(x)$. לכן הגבול לא קיים וממילא הפונקציה לא רציפה.

הפונקציה מוגדרת ב-$x_0 = 0$ ומתקיים $\lim_{x\to 0} g(x) = 6 = g(0)$ ולכן היא רציפה שם. ■

במקרה של פונקציה המוגדרת בסביבה חד-צדדית של נקודה, נכליל את הגדרת הרציפות לגבול החד-צדדי המתאים. למשל הפונקציה $\sqrt{x}$ רציפה בנקודה 0 כי הגבול $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}$ קיים ושווה ל-$\sqrt{x}$. לפיכך, כל הפונקציות האלמנטריות רציפות בכל נקודה בתחום ההגדרה. לכן פולינומים ופונקציות מעריכיות רציפות בכל נקודה ב-$\mathbb{R}$, פונקציות רציונליות רציפות בכל נקודה בה המכנה לא מתאפס, פונקציות שורש רציפות בכל נקודה בה הן מוגדרות ופונקציות לוגריתמיות רציפות בכל נקודה חיוביות (כלומר $\ln(x)$ רציפה בכל נקודה $x > 0$). תוך שימוש באריתמטיקה של גבולות, נקבל שגם סכומים, הפרשים, מכפלות, מנות וחזקות של פונקציות אלמנטריות רציפות בכל נקודה בתחום ההגדרתן.

לגבי רציפות של הרכבה של פונקציות, בדומה למשפט 2.2 שתי הפונקציות צריכות להיות רציפות אבל **בנקודות אחרות**. תהי $g \circ f$ פונקציה המוגדרת בסביבה של x_0. אם $f(x)$ רציפה ב-x_0 ואם $g(y)$ רציפה ב-$y_0 = f(x_0)$, אז $g \circ f(x)$ רציפה ב-x_0. בניסוח לא פורמלי, אם $g(y)$ רציפה בנקודה $y_0 = f(x_0)$, אז ניתן לרשום

$$\lim_{x\to x_0} g \circ f(x) = g\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right) = g \circ f(x_0)$$

כך למשל נקבל

$$\lim_{x\to 0} \ln(x^2+5) = \ln\left(\lim_{x\to 0} x^2 + 5\right) = \ln(5)$$

שימו לב שההצדקה למעבר הזה הוא בדיעבד: מותר להחליף את הסדר בין הגבול ללאן מאחר והגבול של $x^2 + 5$ הוא חיובי ובנקודה זו הפונקציה לאן רציפה.

נהוג לחלק את נקודות אי-הרציפות של הפונקציות לשלושה סוגים. נקודת אי רציפות שבה הגבול קיים **אי-רציפות סליקה** היא (תנאי 2 בהגדרה 3.1 מתקיים) אבל הפונקציה לא מוגדרת בנקודה (תנאי 1 מופר) או שמוגדרת אך הערך לא שווה לגבול (תנאי 3 מופר). בשני המקרים, יהיה "חור" בפונקציה וניתן לתקן זאת על ידי הגדרה מחדש של ערך הפונקציה בנקודה כך שה"חור" ייסתם ואי-הרציפות תסולק. למשל אם נגדיר שערך הפונקציה השחורה באיור 3.1 בנקודה $x = 1$ הוא $y = 1$, החור ייסגר והפונקציה תהיה רציפה ב-$x = 1$.

אפשרות נוספת היא שהגבול לא קיים (תנאי 2 מופר) אבל הגבולות החד-צדדיים קיימים. במקרה כזה יש קפיצה בפונקציה, כפי שמודגם על ידי הפונקציה האדומה באיור 3.1. פונקציה כזו לא ניתן לתקן על ידי הגדרה מחדש של ערך הפונקציה בנקודה, שכן זה לא מספיק כדי לגרום לשני הקווים להתחבר. יחד עם זאת, אם נמקד את הדיון רק באחד הצדדים של הפונקציה (למשל נחליט שתחום ההגדרה הוא רק $x \leq 0$ בדוגמא זו) אז הפונקציה תהיה רציפה בנקודה, כי הגבול החד-צדדי שם שווה לערך הפונקציה. נקודת אי-רציפות כזו נקראית **אי-רציפות מהסוג הראשון**.

כאשר גם הגבולות החד-צדדיים לא קיימים (או לא סופיים) נקבל **אי-רציפות מהסוג השני**, וזו אי-רציפות שלא ניתן לתקן גם על ידי צמצום תחום ההגדרה של הפונקציה. למשל לפונקציה $f(x) = 1/x$ אי-רציפות מהסוג השני ב-$x = 0$. הגבולות החד-צדדיים שם הם $\pm\infty$, וגם אם נתבונן רק בערכי $x \geq 0$, הפונקציה עדיין לא תהיה רציפה ב-$x = 0$ לא משנה איך נגדיר את $f(0)$. רוב הפונקציות בהן נעסוק בכלכלה יהיו רציפות פרט למספר נקודות אי-רציפות סליקות או מהסוג הראשון.

דוגמא 3.2. נתונה הפונקציה $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x-2}{x-1}, & x < 3 \\ \frac{a}{x}, & x \geq 3 \end{cases}$, כאשר $a \in \mathbb{R}$ קבוע. מצאו את כל הנקודות בהן הפונקציה יכולה להיות לא רציפה. כיצד ניתן לתקן את הפונקציה כך שתהיה רציפה בכל תחום הגדרתה?

פתרון. תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ הוא $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ שכן רק $x = 1$ מאפס את המכנה (אמנם $x = 0$ מאפס את המכנה של a/x, אבל הוא לא מהווה בעייה כי $x = 0$ נמצא בתחום העליון ושם הפונקציה מוגדרת אחרת). פרט לכך, הפונקציה מוגדרת בכל תחום בתור פונקציה רציונלית וככזו היא רציפה לכל x עבורו המכנה לא מתאפס. לכן נקודות אי-הרציפות האפשרויות היחידות הן $x = 1$ (המכנה מתאפס) ו-$x = 3$ (ההגדרה של הפונקציה משתנה ואולי הגבולות החד-צדדיים שונים).

עבור $x = 1$ מתקיים

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+2)}{x-1} = 3$$

כלומר הגבול קיים וסופי, ואם נגדיר $f(1) = 3$, הפונקציה תהיה רציפה בנקודה $x = 1$.

עבור $x = 3$ מתקיים $\lim_{x\to 3^-} f(x) = 5$ וכן $\lim_{x\to 3^+} f(x) = a/3$. הפונקציה תהיה רציפה רק אם הגבולות החד-צדדיים יהיו שווים, כלומר אם יתקיים $a/3 = 5$, דהיינו $a = 15$.

לסיכום, נקודות אי-הרציפות האפשרויות של הפונקציה הן $x = 1, 3$, והיא תהיה רציפה אם נקבע $a = 15$ ונוסיף להגדרה $f(1) = 3$. ■

תרגיל 3.1. מצאו את כל נקודות אי-הרציפות של הפונקציות הבאות וסווגו אותן.

1. $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2+x}{(x+3)^2} & x \neq 1, \\ 0 & x = 1 \end{cases}$.
2. $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 1 \\ \frac{3x^2-4x+1}{x-1}, & x > 1 \end{cases}$.
3. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2.5, & x \leq 2 \\ x/2 + 1/x, & x > 2 \end{cases}$.
4. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$

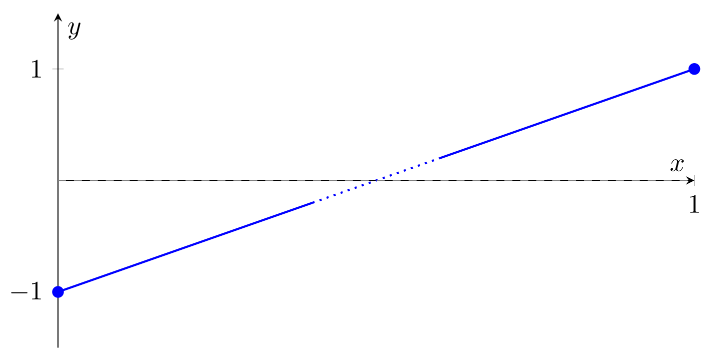
3.1 תכונות של פונקציות רציפות

הגדרה 3.1 עוסקת ברציפות של פונקציה בנקודה. באופן מפתיע, קיימות פונקציות שרציפות רק בנקודה אחת, מה שלא מסתדר עם המוטיבציה שהייתה לנו, פונקציה שהגרף שלה הוא קו רציף וניתן לשרטט אותו "בלי להרים את היד מהדף". לשם כך, נרחיב את ההגדרה מהגדרה נקודתית להגדרה העוסקת בקטע שלם

הגדרה 3.2. הפונקציה $f(x)$ רציפה בקטע $[a,b]$ אם היא רציפה בכל נקודה בקטע (בקצוות, הרציפות היא חד-צדדית).

פונקציה רציפה בקטע סגור ניתנת לתיאור בתור קו רציף ללא קפיצות או חורים, וככזו יש לה מספר תכונות מעניינות ושימושיות. למשל, אם הפונקציה מקבלת ערכים שליליים ליד הנקודה a וערכים חיוביים ליד הנקודה b, אזי היא חייבת בנקודה כלשהי לקבל גם את הערך 0. הסיבה היא שלא ניתן לשרטט קו רציף שמתחיל מתחת לישר $y=0$, מסיים מעל הישר $y=0$ ולא חותך אותו בשום נקודה (ראו איור 3.2) ההכללה של תכונה זו נקראית משפט ערך הביניים: אם הפונקציה רציפה מקבלת ערכים מתחת ומעל לערך מסויים, אזי היא מקבלת גם את ערך הביניים.

משפט 3.1 (משפט ערך הביניים)**.** תהי $f(x)$ רציפה בקטע $[a,b]$ ונניח כי קיים $M\in\mathbb{R}$ כך ש-$f(a)\le M\le f(b)$ (או להפך, $f(a)\ge M\ge f(b)$). אזי קיימת נקודה $c\in[a,b]$ כך ש-$f(c)=M$.



איור 3.2: הדגמה של משפט ערך הביניים. הפונקציה מתחילה בערכים שליליים, מסיימת בערכים חיוביים ולכן חייבת לעבור גם ב-0. אין לשרטט קו רציף בין שני החלקים של הפונקציה שלא יחתוך את הישר $y=0$ (הציר).

תרגיל 3.2. האם משפט ערך הביניים נכון גם כאשר הפונקציה מוגדרת בקטע הסגור $[a,b]$ אבל רציפה רק בקטע הפתוח (a,b)? אם כן - הוכיחו. אם לא - מצאו דוגמא נגדית.

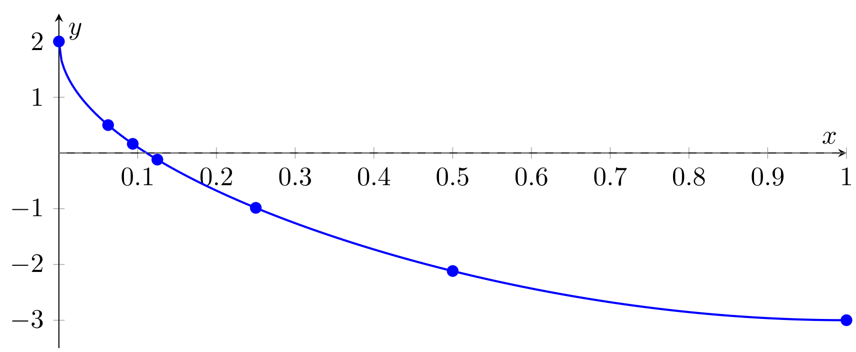
למשפט ערך הביניים יש מספר שימושים מעניינים למרות שהוא רק משפט קיום: הוא קובע שקיימת נקודה $c\in[a,b]$ המקיימת $f(c)=M$ אבל לא מהן התכונות הנוספות שלה או איך למצוא אותה, או כמה נקודות כאלו יש בכלל. למשל, באמצעות המשפט אפשר לקבוע שיש למשוואה כלשהי יש פתרון. לדוגמא, נתבונן במשוואה $x^3-6\sqrt{x}+2=0$ ונוכיח שיש לה פתרון בקטע $[0,1]$. לשם כך נגדיר $f(x)=x^3-6\sqrt{x}+2$ ונשים לב כי זוהי פונקציה רציפה בתחום $[0,1]$ המקיימת $f(0)=2>-3=f(1)$. לפי משפט ערך הביניים, קיימת אם כך נקודה $c\in[0,1]$ (למעשה, $c\in(0,1)$ כי ראינו ש-$0,1$ אינם פתרונות) המקיימת $f(c)=0$.

תרגיל 3.3. הוכיחו כי לכל פולינום מדרגה אי-זוגית (כלומר, שהחזקה הגבוהה ביותר היא מספר אי-זוגי) יש שורש ממשי אחד לפחות.

יתרה מכך, ניתן להשתמש במשפט ערך הביניים גם כדי לחשב פתרונות בצורה נומרית, כלומר בצורה מקורבת על ידי מחשב (בשונה מפתרון אנליטי הניתן על ידי נוסחא, דוגמת נוסחת השורשים למשוואה ממעלה שנייה, ראו פרק 1.4). השיטה מבוססת על חישוב ערך הפונקציה בקצוות הקטע ובאמצע הקטע, והתמקדות בכל פעם בחצי הקטע בו ערך הפונקציה חיובי בקצה אחד ושלילי בקצה השני. באופן זה, השורש נמצא תמיד בין שני הקצוות ומאחר ואורך הקטע קטן פי 2 בכל צעד (הקטע נחצה לשניים), אנו נתקרב לערך האמיתי יותר ויותר. נמחיש זאת באמצעות מציאת השורש בקטע $[0,1]$ של המשוואה $f(x) = x^3 - 6\sqrt{x} + 2 = 0$.

ראינו מקודם כי $f(0) = 2 > 0 > -3 = f(1)$. בנוסף, $f(0.5) = -2.11$. מאחר ו-$f(0) > 0 > f(0.5)$, השורש מוכרח להיות בקטע $[0, 0.5]$. נחשב שוב את ערך הפונקציה באמצע הקטע: $f(0.25) = -0.98 < 0$. שוב, $f(0) > 0 > f(0.25)$ ולכן השורש מוכרח להיות בקטע $[0, 0.25]$. נמשיך לחצות את הקטע: $f(0.125) = -0.11$ ולכן השורש יהיה בקטע $[0, 0.125]$ וחציה נוספת תוביל אותנו ל-$f(0.0625) = 0.55$. לכן הפעם נזיז את נקודת ההתחלה של הקטע. מתקיים $f(0.0625) > 0 > f(0.125)$ ולכן השורש נמצא בקטע $[0.0625, 0.125]$. אפשר להמשיך את התהליך הזה שוב ושוב עד שהקטע יהיה קטן מספיק על מנת שהדיוק יתאים. למשל כאן, אמצע הקטע הוא $f(0.09375) > 0$ ולכן עוד צעד אחד יביא אותנו לכך שהשורש נמצא בקטע $[0.09375, 0.125]$, כלומר שהשורש הוא בערך 0.1 ואם דיוק זה מספיק לנו אפשר לעצור ואם לא, אפשר להמשיך לחשב ולהתקרב אליו עוד יותר (השורש האמיתי הוא בערך 0.111).

לסיכום, באמצעות שיטת החצייה המרנו בעיה קשה מאוד (פתרון של משוואה ומציאת שורשים) לסדרה של חישובים יחסית פשוטים (חישוב ערך של פונקציה בנקודות מסויימות), תוך שימוש בכך שהפונקציה רציפה ובמשפט ערך הביניים. באיור 3.3 מוצג גרף הפונקציה והנקודות שחושבו לאורך התהליך. ניתן לראות שהנקודות מתקרבות למקום האמיתי בו הפונקציה מתאפסת, בסביבות $x = 0.1$.



איור 3.3: איתור שורש של $f(x) = x^3 - 6\sqrt{x} + 2 = 0$ באמצעות שיטת החציה. הנקודות מתארות ערכי הפונקציה שחושבו במהלך התהליך.

משפט ערך הביניים למעשה עוסק בשתי פונקציות רציפות, הפונקציה $f(x)$ המופיעה בו מפורשות והפונקציה הקבועה $y(x) = M$. לפי משפט ערך הביניים יכולים להיות אחד משני מצבים: או שאחת הפונקציות תמיד גדולה מהפונקציה השניה, או שהן נחתכות. טענה זו ניתנת להכללה גם אם הפונקציה השניה שעוסקים בה היא לא הפונקציה הקבועה $y(x) = M$ אלא פונקציה כלשהי $g(x)$. במקרה כזה, או שאחת הפונקציות תמיד גדולה מהשניה או,

במקרה שפעם $f(x) > g(x)$ ופעם להפך, הן חייבות להחתך כשהן מחליפות "צדדים".

מסקנה 3.1. תהיינה $f(x), g(x) : [a,b] \to \mathbb{R}$ פונקציות רציפות המקיימות $f(a) > g(a)$ וכן $f(b) < g(b)$. אזי קיימת נקודה $c \in (a,b)$ כך ש-$f(c) = g(c)$.

הוכחה. נגדיר $h(x) = f(x) - g(x)$. זו פונקציה רציפה (כהפרש של פונקציות רציפות) ומתקיים $h(a) = f(a) - g(a) > 0$ וכן $h(b) = f(b) - g(b) < 0$. לפי משפט ערך הביניים, קיימת נקודה $c \in (a,b)$ כך ש-$h(c) = 0$ ולכן $f(c) = g(c)$. ■

דוגמא 3.3. נהג יוצא מתל אביב בשעה 8:00 ומגיע לירושלים בשעה 9:00. למחרת, הנהג יוצא מירושלים בשעה 8:00 ומגיע לתל אביב בשעה 9:00. הוכיחו: קיימת שעה שבה בשני הימים הנהג היה באותו מרחק מתל אביב.

פתרון. לשם הפשטות, נמדוד את הזמן בתור $t \in [0,1]$ בתור הזמן בשעות אחרי השעה 8:00 (בשני הימים). נסמן ב-$f(x) : [0,1] \to \mathbb{R}$ את המרחק של הנהג מתל אביב ביום הראשון בשעה t וב-$g(x) : [0,1] \to \mathbb{R}$ את המרחק של הנהג מתל אביב ביום השני בשעה t. נניח לשם הפשטות שהמרחק בין הערים הוא 60 ק"מ.

מתקיים $f(0) = 0, f(1) = 60$ וכן $g(0) = 60, g(1) = 0$. בנוסף, הפונקציות f, g רציפות (הנסיעה של הנהג רציפה והוא לא יכול "לשגר" את עצמו קדימה) ולכן לפי המסקנה של משפט ערך הביניים, קיימת נקודה $c \in (0,1)$ כך ש-$f(c) = g(c)$.

כלומר, בשעה c הנהג היה באותו מרחק מתל אביב בדרך הלוך ביום הראשון כמו בדרך חזור ביום השני. ■

מקרה מיוחד ומעניין הוא המצב בו התחום והטווח של הפונקציה $f(x)$ זהה, כלומר $f(x) : [a,b] \to [a,b]$. במקרה כזה, אם ניקח את הפונקציה השניה להיות $g(x) = x$, נקבל שיש נקודה בה הן נחתכות, ובנקודה זו מתקיים $f(x) = x$. נקודה כזו נקראית **נקודת שבת של הפונקציה**, שכן בנקודה זו הפונקציה לא עושה כלום ("שובתת") והפלט שלה שווה לקלט.

מסקנה 3.2 (משפט נקודת השבת של בראוור)**.** תהי $f(x) : [a,b] \to [a,b]$ פונקציה רציפה. אזי לפונקציה קיימת נקודת שבת, כלומר נקודה $c \in [a,b]$ כך ש-$f(c) = c$.

הוכחה. אם $f(a) = a$ או $f(b) = b$ אז אלו הנקודות המבוקשות וסיימנו. לכן נניח ש-$f(a) > a$ וכן $f(b) < b$. נגדיר $g(x) = x : [a,b] \to [a,b]$. מתקיים $f(a) > g(a)$ וכן $f(b) < g(b)$ ולפי משפט ערך הביניים קיימת נקודה $c \in (a,b)$ כך ש- $f(c) = g(c) = c$. ■

למשפט נקודת השבת של בראוור (בעיקר להכללות שלו לפונקציות מרובות משתנים) ישנם שימושים רבים בכלכלה, למשל כחלק ממשפט נאש המוכיח קיום שווי משקל במשחקים. שם, הפונקציה הרציפה היא פונקציה הבוחרת את התשובה הטובה ביותר לאסטרטגיה של כל השחקנים. נאש הוכיח שהפונקציה הזו רציפה ולכן קיימת לה נקודת שבת, כלומר יש אסטרטגיות כאלו שכאשר כל השחקנים נוקטים בהן, לאף שחקן אין סטייה כדאית כי האסטרטגיה שהוא משחק היא כבר התשובה הטובה ביותר לאסטרטגיות של היתר. ההוכחה המלאה (והגדרת המושגים המדוייקים) חורגת מהחומר, ולכן נסתפק בדוגמא פשוטה יותר.

נניח שקיים מוכר שקובע מחיר $p \in [0,1]$ למוצר על סמך הביקוש שהוא צופה שיהיה. נסמן ב-$f(p)$ את המחיר האופטימלי שהמוכר היה רוצה לקבוע בהתאם לביקוש שקרה בפועל (כתוצאה מהמחיר p) שהוא קבע. למשל, כאשר המחיר p היה נמוך, הביקוש היה גבוה והיה כדאי לו לקבוע מחיר גדול יותר ולהפך - כאשר המחיר היה גבוה, הביקוש היה נמוך והיה כדאי לו לקבוע מחיר נמוך יותר. לכן מתקיים $f(0) > 0$ וכן $f(1) < 1$.

הנחה סבירה היא שהפונקציה $f(p)$ היא פונקציה רציפה. אם במקום המחיר p המוכר היה קובע מחיר מאוד קרוב אליו p', אז גם הביקוש החדש היה מאוד קרוב לביקוש הישן

ולכן התיקון שהוא היה צריך לעשות במחיר, $f(p')$, היה צריך להיות מאוד קרוב לתיקון המקורי $f(p)$.

לפי משפט ערך הביניים, קיים לפיכך מחיר "נכון" $p^* \in [0,1]$ שבו $f(p^*) = p^*$. המחיר p^* נכון במובן הזה שהביקוש אותו הוא משרה שווה בדיוק לביקוש שהמוכר ציפה שיהיה, ולכן אין צורך לתקן את המחיר ואין למוכר חרטה על כך שלא קבע מחיר אחר במקום. שימו לב שידענו לנבא את קיומו של המחיר הנכון רק על סמך תכונות מאוד כלליות של הפונקציה (רציפות), בלי להניח שום דבר על הנוסחא שמתארת את הפונקציה או למצוא את המחיר p^* בצורה מפורשת.

תכונה נוספת של פונקציות רציפות היא שלפונקציה רציפה בקטע סגור יש תמיד ערך מקסימלי וערך מינימאלי. הטענה לא נכונה בקטע פתוח (לפונקציה $f(x) = 1/x$ אין מקסימום בקטע $(0,1)$ כי ככל שמתקרבים ל-0 מקבלים ערך יותר ויותר גבוה) ולא נכונה לפונקציות שאינן רציפות (למשל לפונקציה $f(x) = \begin{cases} x, & x \in (0,1) \\ 0.5, & x = 0,1 \end{cases}$ אין מקסימום ומינימום בקטע: ככל שמתקרבים ל-$x = 1$ מקבלים ערך גדול יותר וככל שמתקרבים ל-$x = 0$ מקבלים ערך קטן יותר). את המשפט הוכיח המתמטיקאי הגרמני קארל ויירשטראס:

משפט 3.2 (משפט ויירשטראס)**.** תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע הסגור $[a,b]$. אזי הפונקציה מקבלת ערך מקסימאלי ומינימאלי בקטע, כלומר קיימים $x_M, x_m \in [a,b]$ כך שלכל $x \in [a,b]$ מתקיים $f(x_m) \le f(x) \le f(x_M)$.

תרגיל 3.4. באיזה מהקטעים הבאים לפונקציה $f(x) = 1/x$ יש מקסימום ומינימום?

א. $[0,1]$.
ב. $(0,1)$.
ג. $[-1,1]$.
ד. $[1,2]$.
ה. $(1,3]$.

3.2 תרגילים מסכמים

תרגיל 3.5. נתונה הפונקציה $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-8x-9}{3-\sqrt{x}}, & x > 9, \\ ax+b-6, & 0 \le x \le 9, \\ e^{1/x}, & x < 0. \end{cases}$ כאשר $a, b \in \mathbb{R}$ קבועים.
מצאו את הערכים של a, b כך שהפונקציה $f(x)$ תהיה רציפה.

תרגיל 3.6. עבור אילו ערכים של הקבוע $k \in \mathbb{R}$ הפונקציה הבאות יהיו רציפות בנקודה $x = 2$:

א. $f(x) = \begin{cases} x^k, & x \le 2 \\ 2x+4, & x > 2. \end{cases}$

ב. $f(x) = \begin{cases} x+k, & x \le 2 \\ 5-x, & x > 2. \end{cases}$

תרגיל 3.7. הוכיחו כי למשוואות הבאות יש לפחות פתרון אחד:

א. $x^4 + 3x + 1 = 0$.
ב. $2x^3 - 3x^2 - 12x - 6 = 0$.

3. $2x^4 - x^3 - 5 = 0$.

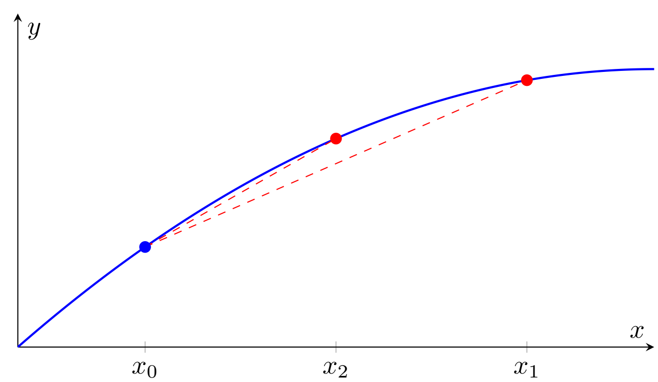
תרגיל 3.8. תנו דוגמא לפונקציה $f(x) : [2,4] \to [2,4]$ המקיימת $f(2) = f(4) = 3$ ואין לה נקודת שבת.

4 נגזרות

בפרק הקודם ראינו שפונקציה רציפה מקיימת את התכונה ששינוי קטן בערך של המשתנה x גורר שינוי קטן בערך הפונקציה $f(x)$. זה היה דיון איכותי, וכעת נעבור לדיון כמותי שבו ננסה להעריך עד כמה משתנה $f(x)$ כאשר משנים את x בקצת. דבר זה מוביל אותנו לאחד המושגים המרכזיים בחשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי - הנגזרת.

נניח ש-x הוא מחיר של מוצר מסויים (בש"ח) ו-$f(x) = 2x - x^2 : [0,2] \to \mathbb{R}$ הוא הרווח (במיליוני ש"ח) לחברה כאשר היא מוכרת את המוצר במחיר x. המחיר כיום הוא $x_0 = 0.5$ והחברה מעוניינת להעלות אותו ב-10 אגורות ל-$x_1 = 0.6$. במקרה כזה הרווח יגדל מ-$f(x_0) = 0.75$ ל-$f(x_1) = 0.84$. אם נשתמש בשתי נקודות אלו, נחבר אותן בקו ישר ונחשב את השיפוע, נקבל $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = \frac{0.84-0.75}{0.6-0.5} = 0.9$. השיפוע הזה מתאר בקירוב את קצב הגידול של הרווח ביחס למחיר ההתחלתי x_0: כל הגדלה של המחיר באגורה אחת תגדיל את הרווח ב-$0.9 \cdot 0.01 = 0.009$ מיליוני ש"ח.

החישוב שעשינו בדוגמא הזו הוא מקורב ולא מדוייק: חישבנו את הערך של הפונקציה בשתי נקודות והתייחסנו אל $f(x)$ כאילו היא קו ישר העובר בין הנקודות, אבל היא לא. יתרה מכך, הבחירה בנקודה x_1 הייתה שרירותית. אם נבחר נקודה אחרת, למשל $x_2 = 0.55$, נקבל שיפוע אחר וקצב גידול אחר (ראו איור 4.1). אם אנחנו רוצים לדעת את קצב הגידול בנקודה x_0, עלינו לקחת בתור הנקודה השניה נקודה כלשהי שתהיה מאוד קרובה ל-x_0.



איור 4.1: קירוב לפונקציה באמצעות קו ישר העובר בנקודה $(x_0, f(x_0))$ ונקודה נוספת. בכל פעם נקבל קו ישר אחר עם שיפוע שונה.

נסכם - אנחנו מעוניינים לדעת מה קצב השינוי של הפונקציה בנקודה מסויימת x_0 ולשם כך מחשבים את השיפוע של הקו הישר העובר בין הנקודות $(x_0, f(x_0))$ ו-$(x_1, f(x_1))$, כאשר x_1 מאוד קרובה ל-x_0. תיאור זה מתאר תהליך גבולי, של חישוב הגבול של השיפוע כאשר הנקודה השנייה x_1 שואפת לנקודה הראשונה x_0. את התוצאה של התהליך הזה אנחנו מגדירים להיות **הנגזרת של הפונקציה** $f(x)$ **בנקודה** x_0 ומסמנים בתור $f'(x_0)$.[2]

הגדרה 4.1. תהיי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבה של הנקודה x_0 (כולל x_0). נאמר שהפונקציה גזירה בנקודה x_0 אם קיים הגבול

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

[2] סימונים נוספים ומקובלים הם $\frac{\partial f(x_0)}{\partial x}$, $\frac{df(x_0)}{dx}$, $f^{(1)}(x_0)$. נעמוד על ההבדל בין הסימונים בהמשך.

במקרה כזה, ערך הגבול ייקרא הנגזרת של $f(x)$ בנקודה x_0.

לרוב נסמן $x = x_0 + h$ כך שהשאיפה $x \to x_0$ תתורגם לשאיפה $h \to 0$ והגבול המתאר את הנגזרת יהיה $f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. שני הגבולות זהים לחלוטין (מדובר רק על החלפת משתנים) אך הגבול השני קצת יותר נוח לחישובים מבחינה אלגברית. לדוגמא, נחשב את הנגזרת של $f(x) = x^2$ בנקודה x_0 כלשהי:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x_0^2 + 2x_0h + h^2 - x_0^2}{h} = \lim_{h\to 0} 2x_0 + h = 2x_0$$

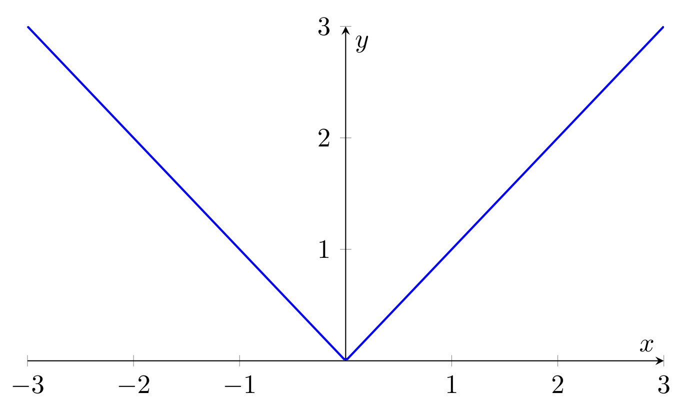
לא כל הפונקציות גזירות. למשל פונקציית הערך המוחלט $f(x) = |x|$ אינה גזירה ב-$x_0 = 0$ כי הגבול המתאר את הנגזרת לא קיים שם. במקום זאת, הגבולות החד-צדדיים קיימים והם שונים:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{|h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1; \qquad \lim_{h\to 0^-} \frac{|h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

לפונקציה זו יש "שפיץ" בנקודה $x_0 = 0$: כשמתקרבים אליו משמאל השיפוע הוא -1 וכשמתקרבים מימין השיפוע הוא $+1$. מסיבה זו לפונקציות גזירות נתייחס הרבה פעמים בתור פונקציות "חלקות" שכן אין בגרף שלהן שפיצים כמו לפונקציית הערך המוחלט. כפי שתוכיחו בתרגיל הבא, פונקציה שהיא גזירה היא כמובן גם רציפה.

תרגיל 4.1. הוכיחו: אם $f(x)$ גזירה בנקודה x_0 אז היא גם רציפה בנקודה x_0.

האם גם ההפך נכון, כלומר האם פונקציה הרציפה בנקודה x_0 גם גזירה בה? הוכיחו או הפריכו באמצעות דוגמא נגדית.

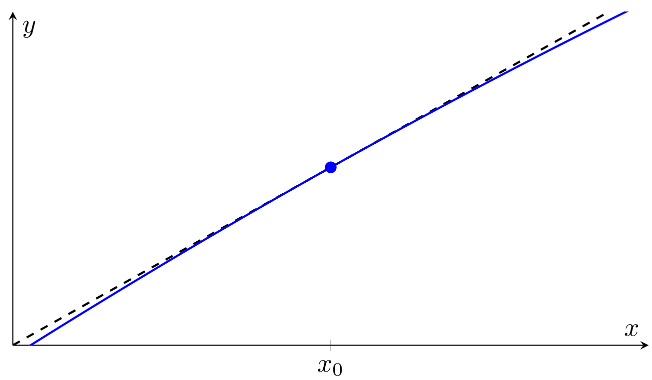


איור 4.2: פונקציית הערך המוחלט הגזירה בכל נקודה פרט ל-$x = 0$.

הנגזרת אם כך היא גבול השיפועים של מיתרים המחברים שתי נקודות על הפונקציה כאשר שיעורי ה-x של הנקודות שואפים זה לזה. בגבול, מיתרים אלו הופכים למשיק לפונקציה והנגזרת היא שיפוע המשיק בנקודת ההשקה. כלומר, אם נשרטט ישר העובר דרך נקודה $(x_0, f(x_0))$ ששיפועו הוא $f'(x_0)$, נקבל ישר שנוגע בפונקציה וקצב השינוי שלו (השיפוע) שווה לקצב השינוי הרגעי של הפונקציה (הנגזרת). המשוואה של ישר כזה הינה

$$y(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

וישר זה נקרא **המשיק לפונקציה** בנקודה x_0. באיור 4.3 משורטטת הפונקציה מאיור 4.1 יחד עם המשיק לה, בסביבה מאוד קטנה סביב x_0. אנו רואים כי סביב x_0 הפונקציה והמשיק כמעט זהים, כלומר המשיק מהווה קירוב טוב לפונקציה סביב x_0 והפונקציה מתנהגת כמעט כמו קו ישר שם. זה מאוד נוח, כי לא משנה כמה הפונקציה $f(x)$ היא מסובכת, אם אנחנו עוסקים רק בשינויים קטנים ביחס לנקודה מסויימת x_0, ניתן להתייחס אל הפונקציה ביחס לשינויים אלו כאילו היא פונקציה פשוטה - קו ישר. תופעה זו מזכירה את המוכר לנו מכדור הארץ: אמנם כדור הארץ עגול, אבל אנחנו לא מרגישים זאת, שכן מבחינתנו, החלק הקטן של כדור הארץ בו אנו נמצאים נראה כמו קו ישר (שטוח).



איור 4.3: הפונקציה מאיור 4.1 (בכחול) משורטטת בסביבה קרובה של הנקודה x_0 והמשיק לפונקציה (בשחור). בסביבת הנקודה, המשיק והפונקציה כמעט זהים.

בטרם נפנה לאופן הטכני בו נגזרת מחושבת, נעיר כי פונקציית הנגזרת $f'(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, המחשבת בכל נקודה את הנגזרת של פונקציה גזירה כלשהי $f(x)$, היא פונקציה לכל דבר. כפי שראינו לעיל, הנגזרת של הפונקציה $f(x)=x^2$ היא הפונקציה $f'(x)=2x$ וזו פונקציה רגילה לחלוטין. פונקציה זו ניתן לחקור ולבדוק האם גם היא רציפה כמו $f(x)$ (לא בהכרח) והאם גם היא גזירה (לא בהכרח). במידה וכן, ניתן לגזור אותה ולקבל את **הנגזרת השנייה** של $f(x)$ המסומנת $f''(x)$.[3] באופן דומה, ניתן לגזור גם את הנגזרת השניה ולקבל את הנגזרת השלישית, לגזור את הנגזרת השלישית ולקבל את הנגזרת הרביעית וכן הלאה.

בשנת 1972 נשיא ארה"ב דאז ריצ'רד ניקסון הודיע כי קצב הגידול באינפלציה יורד. על כך נאמר שזו הפעם הראשונה בהיסטוריה שנשיא מכהן משתמש בנגזרת שלישית בשביל להיבחר לכהונה שנייה. מדוע? הפונקציה הרלוונטית כאן היא $f(t)$, המתארת את המחיר של סל המוצרים בזמן t מסויים. הנגזרת של הפונקציה, $f'(t)$, מתארת את קצב השינוי של מחיר סל המוצרים, המכונה אינפלציה (כאשר אומרים שהאינפלציה החודש היא 3%, הכוונה שהמוצרים התייקרו ב-3% ביחס לחודש הקודם, כלומר זהו השינוי במחיר ולא המחיר עצמו). הנגזרת השנייה, $f''(t)$, מתארת את הקצב בו האינפלציה משתנה, כלומר את קצב הגידול באינפלציה. הנגזרת השלישית $f'''(t)$ מתארת את הקצב בו קצב שינוי האינפלציה משתנה, כלומר את קצב השינוי של הגידול באינפלציה, ולכך התייחס ניקסון באמירה שלו. אם נקרא שוב את האמירה של ניקסון, נראה שבעצם המחירים עולים, הקצב בו הם עולים גדל עם הזמן, אבל קצת יותר לאט מאשר בעבר. לא נשמע מאוד מרשים כשחושבים על זה.

[3] סימונים נוספים ומקובלים הם $\frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x^2}$, $\frac{d^2 f(x_0)}{dx^2}$, $f^{(2)}(x_0)$.

4.1 כללי גזירה

לאחר שהבנו את המשמעות של הנגזרת, אנחנו מוכנים לפתח את הכלים הטכניים לחישוב נגזרות. כרגיל, נפתח בחישוב הנגזרות של הפונקציות האלמנטריות, אותן ניתן לחשב (אך לא נעשה זאת) באופן מפורש על ידי חישוב הגבול, כפי שחישבנו את הנגזרת של $f(x) = x^2$ לעיל:

משפט 4.1. נגזרות של פונקציות אלמנטריות:

1. הנגזרת של הפונקציה הקבועה $f(x) = c$ היא $f'(x) = 0$ לכל $c \in \mathbb{R}$ ובכל נקודה $x \in \mathbb{R}$.
2. הנגזרת של חזקה מהצורה $f(x) = x^n$ היא $f'(x) = nx^{n-1}$ לכל $x \in \mathbb{R}$ ולכל $n \in \mathbb{N}$.
3. הנגזרת של פונקציית השורש $f(x) = \sqrt{x}$ היא $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ לכל $x > 0$.
4. ההכללה של שני הסעיפים הקודמים היא שהנגזרת של הפונקציה $f(x) = x^p$ לכל $p \in \mathbb{R}$ היא $f'(x) = px^{p-1}$, לכל x בתחום ההגדרה.
5. הנגזרת של פונקציית האקספוננט $f(x) = e^x$ היא $f'(x) = e^x$ לכל $x \in \mathbb{R}$.
6. הנגזרת של פונקציית הלוגריתם $f(x) = \ln(x)$ היא $f'(x) = 1/x$ לכל $x > 0$.

מאחר ונגזרת היא למעשה גבול של פונקציה, מרגע שאנחנו יודעים נגזרות של פונקציות אלמנטריות פשוטות, ניתן לחשב נגזרות של פונקציות מורכבות יותר באמצעות שימוש באריתמטיקה של גבולות המתורגמים לכללי הגזירה הבאים:

משפט 4.2 (כללי גזירה)**.** תהיינה $f(x), g(x)$ שתי פונקציות הגזירות בנקודה x כלשהי. אזי

1. כפל בקבוע $c \in \mathbb{R}$: $(cf(x))' = cf'(x)$.
2. סכום והפרש: $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$.
3. מכפלה: $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.
4. מנה: $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$, כמובן בהנחה ש-$g(x) \neq 0$.

דוגמא 4.1. חשבו את הנגזרת של הפונקציה $f(x) = x^2\ln(x)$.

פתרון. זוהי מכפלה של פונקציות ולכן נשתמש בנגזרת של מכפלה:

$$f'(x) = (x^2)'\ln(x) + x^2(\ln(x))' = 2x\ln(x) + x^2 \cdot 1/x = 2x\ln(x) + x$$

■

עבור הרכבה של פונקציות, נשתמש בכלל השרשרת.

משפט 4.3 (כלל השרשרת)**.** נניח כי $g(x)$ פונקציה גזירה בנקודה x_0 ו-$f(y)$ פונקציה גזירה בנקודה $y_0 = g(x_0)$. אזי $f \circ g(x)$ גזירה בנקודה x_0 ומתקיים:

$$(f \circ g(x))' = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

המשמעות של כלל השרשרת היא שכאשר גוזרים פונקציה מהצורה $f(g(x))$, עלינו לגזור קודם את הפונקציה $f(y)$ כאילו שהמשתנה הוא $g(x)$ ולאחר מכן להכפיל בנגזרת הפנימית $g'(x)$. לא נוכיח את כלל השרשרת אבל נמחיש אותו באמצעות הרעיון שהנגזרת מתארת את השיפוע של המשיק לפונקציה. נסתכל על הפונקציה $f(x)$ ונגדיל את x_0 באגורה אחת. אם אנחנו קרובים מספיק ל-x_0, אפשר לחשוב על הפונקציה כעל קו ישר ולכן הערך שלה יגדל ב-$1 \cdot f'(x_0)$. עכשיו נניח שהפונקציה היא בעצם $f(g(x))$. הגדלה של x_0 באגורה אחת תגרום לכך שהערך של $g(x)$ יגדל ב-$1 \cdot g'(x_0)$, ולכן מה שמכניסים לתוך $f(x)$ לאו דווקא גדל באגורה אחת (תלוי בערך של $g'(x_0)$). לכן השינוי בערך של הפונקציה המורכבת $f(g(x))$ יהיה $f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$ שכן אנחנו מכפילים בשינוי של הארגומנט של הפונקציה $g'(x_0)$ במקום באגורה אחת.

דוגמא 4.2. חשבו את הנגזרת של $f \circ g(x)$ כאשר $f(x) = x^2$ ו-$g(x) = 2x$. חזרו על החישוב עבור $g \circ f(x)$.

פתרון. לפי כללי הגזירה, $f'(x) = 2x$ ואילו $g'(x) = 2$. לכן $(f \circ g(x))' = f'(2x) \cdot g'(x) = 2(2x) \cdot 2 = 8x$. במקרה הזה הפונקציה פשוטה ואפשר לחשב ישירות: $f \circ g(x) = (2x)^2 = 4x^2$ ואכן הנגזרת של הפוקנציה הזו היא $8x$.

עבור ההרכבה ההפוכה, $(g \circ f(x))' = g'(x^2) \cdot 2x = 2 \cdot 2x = 4x$. גם כאן, חישוב ישיר מראה ש-$g \circ f(x) = g(x^2) = 2x^2$ ואכן הנגזרת היא $4x$. ■

הסוג האחרון של פונקציות שנחשב את הנגזרת שלהן הן פונקציות מהצורה $f(x)^{g(x)}$, עבור $f(x) > 0$. אלו פונקציות מורכבות כי איקס מופיע גם בבסיס החזקה וגם במעריך, ולכן הן לא מתאימות לאף אחת מהנוסחאות שראינו עד כה. אבל, בזכות נוסחא (1.1), ניתן לקבל ביטוי שאפשר לעבוד איתו:

$$\left(f(x)^{g(x)}\right)' = \left(e^{g(x)\ln f(x)}\right)' = e^{g(x)\ln f(x)}\left(g(x)\ln f(x)\right)'$$

כאשר הגזירה התבצעה לפי כלל השרשרת ונותר רק לחשב את הנגזרת הפנימית ולקבל:

$$= e^{g(x)\ln f(x)}\left(g'(x)\ln f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right)$$

מקרה פרטי הוא פונקציה מהצורה a^x כאשר $a > 0$. במקרה זה, $f(x) = a$ ואז $f'(x) = 0$ ואילו $g(x) = x$ ואז $g'(x) = 1$, לכן:

$$(a^x)' = e^{x\ln a}\left(1\ln a + x \cdot \frac{0}{a}\right) = a^x \ln a. \tag{4.1}$$

דוגמא יותר מורכבת היא חישוב הנגזרת של x^x, כפי שתראו בתרגיל הבא:

תרגיל 4.2. חשבו את הנגזרות של הפונקציות הבאות:

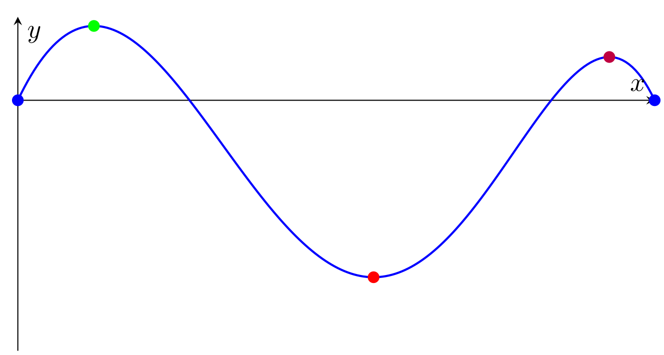
1. $f(x) = \sqrt{x + \ln(x)}$.
2. $f(x) = x^x$.
3. $f(x) = \frac{3}{x^{1/3}} - \frac{4}{\sqrt{x^5}}$.
4. $f(x) = (1 + e^{-x})^7$.
5. $f(x) = x^2 e^{3x}\ln(2x)$.
6. $f(x) = x^{x^2+1}$.

4.2 נקודות קיצון

כעת כשאנחנו יודעים כיצד לחשב את הנגזרת של הפונקציה, נפנה לדון במשמעות שלה. בדוגמא של ניקסון ראינו שהנגזרת של סל המוצרים $f(t)$ היא האינפלציה. כאשר האינפלציה היא 1%, המשמעות היא שסל המוצרים מתייקר כלומר שבתקופת הזמן הרלוונטית סל המוצרים גדל באחוז והפונקציה $f(t)$ עולה (ראו הגדרה 1.1). כאשר האינפלציה שלילית, סל המוצרים מוזל והפונקציה יורדת. כלומר, הסימן של הנגזרת מלמד האם הפונקציה עולה או יורדת בנקודה[4]. אם האינפלציה היא אפס (כלומר, הנגזרת מתאפסת) לא ניתן לדעת כיצד הפונקציה מתנהגת בסביבת הנקודה: ייתכן שהיא עולה,ייתכן שהיא יורדת וייתכן, כפי שנראה בהמשך, שזו נקודת קיצון של הפונקציה כלומר זהו הערך הנמוך ביותר או הגבוה ביותר שהיא מקבלת בסביבה של הנקודה.

הגדרה 4.2 (נקודת קיצון)**.** נקודה x_0 היא נקודת **מקסימום מקומית** של הפונקציה $f(x)$ אם קיימת סביבה של הנקודה x_0 כך שלכל x בסביבה מתקיים $f(x) \le f(x_0)$.
נקודה x_0 היא נקודת **מינימום מקומית** של הפונקציה $f(x)$ אם קיימת סביבה של הנקודה x_0 כך שלכל x בסביבה מתקיים $f(x) \ge f(x_0)$.
נקודה שהיא מקסימום או מינימום (מקומי) נקראית **"נקודת קיצון"**.

הסיבה שבהגדרה נקודת הקיצון היא "מקומית" היא שהנקודה היא מקסימום או מינימום ביחס לסביבה קטנה של הנקודה, אבל לאו דווקא המקסימום או המינימום של הפונקציה. כלומר, מקסימום מקומי היא הנקודה הכי גדולה באזור שלה, אבל לאו דווקא הנקודה הכי גדולה בפונקציה עצמה. נקודה שהיא הכי גבוהה בכל תחום ההגדרה של הפונקציה תיקרא **מקסימום מוחלט** ובהתאם נקודה שהיא הכי נמוכה בכל תחום ההגדרה של הפונקציה תיקרא **מינימום מוחלט**. לדוגמא, מטייל הנמצא במכתש רמון נמצא במינימום מקומי שכן הוא בנקודה הנמוכה ביותר ביחס לסביבה שלו. אבל הוא לא במינימום המוחלט, כי יש מקומות אחרים בהן הגובה נמוך יותר מהמקום בו הוא נמצא (למשל, ים המלח). ראו גם איור 4.4: הנקודות הכחולות הן נקודות מינימום מקומיות (הערכים שם הכי קטנים ביחס לסביבה) והמינימום המוחלט היא הנקודה האדומה.



איור 4.4: פונקציה עם שלוש נקודות מינימום: שתיים מקומיות (בכחול) ואחת מוחלטת (באדום) ושתי נקודות מקסימום: מקומית (בסגול) ומוחלטת (בירוק).

כאמור לעיל, נקודות בהן הנגזרת חיובית או שלילית הן נקודות בהן הפונקציה עולה ויורדת ולמעט המקרה בו הנקודות הן בקצה תחום ההגדרה (כמו הנקודות הכחולות באיור

[4] בהגדרה 1.1 הגדרנו עליה וירידה בקטע. נאמר שפונקציה עולה או יורדת בנקודה אם קיימת סביבה של הנקודה בה הפונקציה עולה או יורדת.

4.4) לא יכולות להיות נקודות קיצון. במקרה שהנגזרת חיובית בקטע מסויים, הפונקציה עולה בכל התחום. לכן, בנקודות קיצון מקומיות שהן פנימיות בתחום ההגדרה (ולא בקצה) הנגזרת חייבת להתאפס.

משפט 4.4 (משפט פרמה)**.** תהי פונקציה $f(x)$ רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה בקטע (a,b). אם $x_0 \in (a,b)$ היא נקודת קיצון של הפונקציה אזי $f'(x_0)=0$.

חשוב מאוד לשים לב לכיוון המשפט: **אם** זו נקודת קיצון, **אז** הנגזרת מתאפסת בה. אבל ההפך לא בהכרח נכון: ייתכן שהנגזרת תתאפס והנקודה היא בכלל לא נקודת קיצון. למשל הנגזרת של הפונקציה $f(x)=x^3$ מתאפסת בנקודה $x_0=0$, אבל זו לא נקודת קיצון, הפונקציה עולה בכל סביבה של x_0 כי לכל $x_1>x_0>x_2$ מתקיים $f(x_1)>f(x_0)=0>f(x_2)$. לכן הנקודות בהן הנגזרת מתאפסת הן נקודות **החשודות** כנקודות קיצון, ועל מנת לוודא שאכן מדובר על נקודת, יש לבצע חישוב נפרד ולהשוות את הערך של הפונקציה שם לערך של הפונקציה בסביבה של כל נקודה. לסיכום, כאשר מחפשים נקודות קיצון של פונקציה, הנקודות החשודות כקיצון הן הנקודות הבאות:

1. כל נקודה בה הפונקציה אינה גזירה היא נקודה החשודה כקיצון, שכן משפט פרמה לא תקף עבור נקודות אלו. למשל, המינימום (המקומי והמוחלט) של הפונקציה $|x|$ מתקבל בנקודה $x_0=0$ ושם הפונקציה לא גזירה.
2. כל נקודת קצה של תחום ההגדרה היא נקודה החשודה כקיצון, למשל שתי הנקודות הכחולות באיור 4.4. כאשר הפונקציה מוגדרת לכל $\mathbb{R}$ או כאשר הפונקציה לא מוגדרת בקצה תחום ההגדררה (למשל $\ln x$ בנקודה 0), סעיף זה לא רלוונטי.
3. כל נקודה שבה הנגזרת מתאפסת היא נקודה החשודה כקיצון, בהתאם למשפט פרמה.

דוגמא 4.3. מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=x^2+4$.

ב. $f(x)=\begin{cases} x, & x>0 \\ 0, & x\le 0\end{cases}$.

ג. $f(x)=\sqrt{x}$.

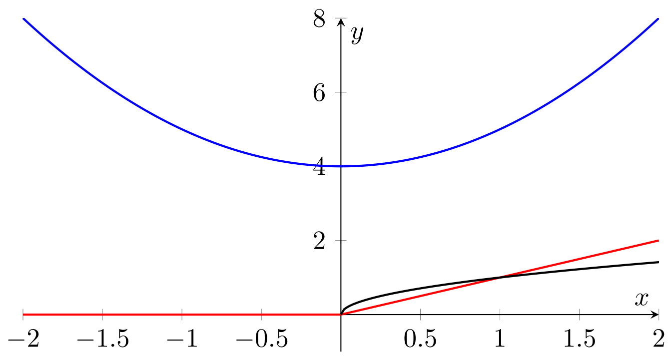
פתרון. 1. הפונקציה מוגדרת לכל $\mathbb{R}$ ולכן נקודות החשודות כקיצון יכולות להיות רק נקודות בהן הנגזרת מתאפסת. מתקיים $f'(x)=2x$ ומהדרישה $f'(x)=0$ נקבל $x=0$ וזו הנקודה היחידה החשודה כנקודת קיצון. לכל x מתקיים $f(x)=x^2+4\ge 4=f(0)$ שכן $x^2\ge 0$ ולכן נקודה זו היא מינימום מקומי ומוחלט.

2. בתחום $x>0$ הנגזרת לא מתאפסת ולכן אין נקודות קיצון בתחום זה. בתחום $x<0$ הנגזרת מתאפסת בכל נקודה. יתרה מכך, לכל $x_0<0$ קיימת סביבה כך שכל x בסביבה מקיים $f(x)=f(x_0)=0$ ולכן כל נקודה כזו היא גם מינימום מקומי (ומוחלט) וגם מקסימום מקומי.

בנקודה $x=0$ הפונקציה לא גזירה (ודאו זאת על ידי חישוב הגבול המגדיר את הנגזרת מימין ומשמאל). לכן גם נקודה זו חשודה כנקודת קיצון. ואכן, לכל $x>0$ מתקיים $f(x)=x>0=f(0)$ ולכל $x<0$ מתקיים $f(x)=f(0)$ ולכן נקודה זו היא נקודת מינימום מקומי (ומוחלט).

3. הפונקציה מוגדרת לכל $x > 0$ אבל הנגזרת לא מתאפסת באף נקודה, לכן הנקודה החשודה היחידה כנקודת קיצון היא קצה תחום ההגדרה, $x_0 = 0$. מאחר ומתקיים $f(x) = \sqrt{x} \geq 0 = f(0)$, הרי שזו נקודת מינימום מקומי (ומוחלט).

שלושת הפונקציות משורטטות לנוחיותכם באיור 4.5. ■



איור 4.5: שלושת הפונקציות בדוגמא 4.3.

דוגמא 4.4. מצאו את נקודות הקיצון וחשבו את תחומי העליה והירידה של הפונקציה $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$.

פתרון. הפונקציה מוגדרת לכל $x \neq 1$ והיא גזירה בכל תחום הגדרתה כפונקציה רציונלית. נחשב את הנגזרת:

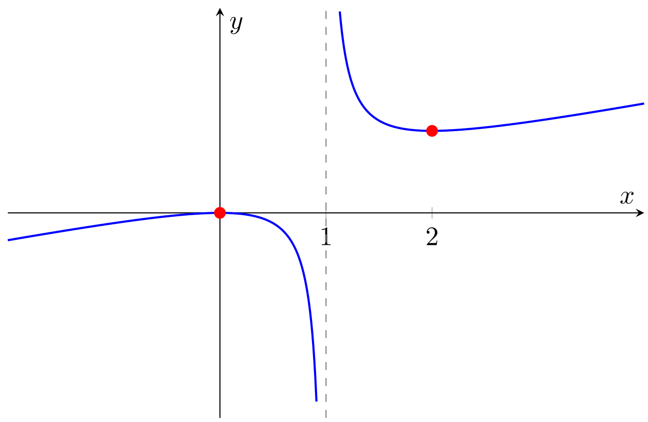
$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

המכנה תמיד חיובי והמונה מתאפס עבור $x = 0, 2$. הסימן של הנגזרת $f'(x)$ נקבע אם כך בהתאם לסימן של המונה.

כאשר $x > 2$ או $x < 0$ שני הגורמים במונה חיוביים (או ששניהם שליליים) ולכן מכפלתם חיובית והנגזרת היא חיובית. בתחום $0 < x < 2$ מתקיים $x > 0$ אבל $x - 2 < 0$ ולכן המכפלה שלילית והנגזרת שלילית. לסיכום: הפונקציה עולה בתחום $x > 2$ וכן בתחום $x < 0$, והפונקציה יורדת בתחום $0 < x < 2$ (פרט לנקודה $x = 1$ בה היא לא מוגדרת).

שתי הנקודות החשודות כנקודות קיצון הן $x = 0, 2$. כדי לקבוע האם אמנם אלו נקודות קיצון (ומאיזה סוג) נבחן את תחומי העליה והירידה סביבן. הפונקציה עולה עבור $x < 0$ ויורדת לאחר מכן כאשר $x > 0$, לכן הנקודה $x = 0$ היא מקסימום מקומי. מאותו נימוק, $x = 2$ הוא מינימום מקומי: הפונקציה יורדת לערכים קטנים מ-2 (אבל קרובים ל-2) ועולה לאחר מכן לערכים גדולים מ-2. שרטוט של הפונקציה מופיע באיור 4.6. ■

הערה 4.1. שיטה טובה מאוד, יעילה, נפוצה בעיקר בתיכוניים **ומאוד לא נכונה** למצוא תחומי עליה וירידה היא למצוא את הנקודות החשודות כקיצון (כלומר בהן הנגזרת מתאפסת) ואז לבדוק מדגמית ערך אחד בכל תחום ולפי ההצבה שלו בנגזרת להסיק את הסימן שלה בכל התחום. למשל בדוגמא 4.4 נקבל שלושה תחומים מעניינים $x < 0, 0 < x < 2, x > 2$ ואז אפשר לחשב למשל את $f'(3), f'(-1), f'(0.5)$ ולפי התוצאה לקבוע את הסימן של הנגזרת בכל התחום.



איור 4.6: הפונקציה $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ ונקודות הקיצון שלה (מסומנות באדום).

אולם, אין סיבה ששיטה זו תעבוד כי לא מובטח לנו שהנגזרת היא פונקציה רציפה או כל דבר דומה, וייתכן שהסימן שלה יקפוץ מחיובי לשלילי גם בלי לעבור באפס. למשל, הפונקציה $g(x) = |f(x)|$ (כאשר $f(x)$ נתונה בדוגמא 4.4) גזירה (מדוע?), הנגזרת שלה מתאפסת גם כן ב-$x = 0, 2$, אבל חישוב ישיר מראה שבתחום $0 < x < 1$ הפונקציה עולה והנגזרת חיובית ואילו בתחום $1 < x < 2$ הפונקציה יורדת והנגזרת שלילית. כלומר, בתחום $0 < x < 2$ הנגזרת החליפה סימן מבלי שעברה דרך האפס (מדוע זה לא סותר את משפט ערך הביניים?). ראו גם את תרגיל 8.5

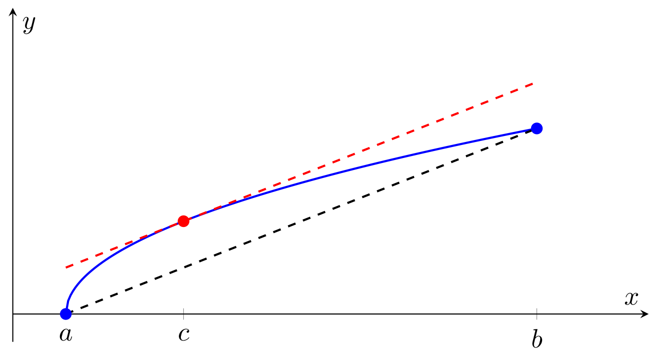
4.3 משפט לגרנז' ומשפט רול

נהג יוצא מעיר אחת ומגיע תוך 20 דקות לעיר אחרת המרוחקת ממנה 50 ק"מ. המהירות הממוצעת שלו אם כך היא 150 קמ"ש, אבל האם הוא אכן נסע במהירות הזו? התשובה האינטואיטיבית היא כן: אם היה נוסע כל הזמן מתחת ל-150 קמ"ש, לא היה מגיע כל כך מהר (ולהפך). לכן או שנסע כל הדרך ב-150 קמ"ש או שלפעמים נסע יותר מהר, לפעמים נסע יותר לאט, וממשפט ערך הביניים - נסע גם במהירות הזו. כאן הסתמכנו על כך שהמהירות (שהיא הנגזרת של המרחק לנקודת ההתחלה) היא גודל שמשתנה ברציפות. מסתבר שהתשובה לשאלה היא חיובית גם באופן הכללי יותר: תמיד תהיה נקודה שבה קצב השינוי הרגעי (קרי, הנגזרת) שווה לקצב השינוי הממוצע בקטע. משפט זה נקרא משפט (הערך הממוצע) של לגרנז'.

משפט 4.5 (משפט לגרנז'). תהי פונקציה $f(x)$ רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה בקטע (a,b). אזי קיימת נקודה $c \in (a,b)$ כך ש-

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

המשפט מודגם באיור 4.7. הקו השחור מתאר את השיפוע הממוצע של הפונקציה בתחום $[a,b]$ ולפי משפט לגרנז' קיימת נקודה c בה הנגזרת (המהווה את השיפוע של המשיק לפונקציה בנקודה) שווה לשיפוע הממוצע. ואכן, הקו האדום והשחור מקבילים, כלומר יש להם את אותו השיפוע. שימו לב שמשפט לגרנז' לא יודע להבטיח מהי אותה נקודה c או איך לחשב אותה, אלא רק אומר שהיא קיימת.



איור 4.7: משפט ערך הביניים של לגרנז'. קיימת נקודה בין a ל-b בה הנגזרת (השיפוע הרגעי, הקו האדום) שווה לשיפוע הממוצע בכל הקטע (הקו השחור).

כמסקנה מיידית נקבל שאם $f(a) = f(b) = 0$ אז לפונקציה יש נקודה בה הנגזרת מתאפסת.

מסקנה 4.1 (משפט רול)**.** תהי פונקציה $f(x)$ רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה בקטע (a,b), כך שמתקיים $f(a) = f(b) = 0$. אזי קיימת נקודה $c \in (a,b)$ כך ש- $f'(c) = 0$.

תרגיל 4.3. הוכיחו את משפט רול ישירות, באמצעות משפטי ויירשטראס ופרמה.

תרגיל 4.4. הוכיחו: $f(x)$ היא פונקציה קבועה אם ורק אם $f'(x) = 0$ לכל נקודה.

באמצעות משפט רול אפשר לקבוע כמה פתרונות יש **לכל היותר** למשוואה כלשהי. הסיבה היא שבין כל שני פתרונות של המשוואה $f(x) = 0$ (כאשר $f(x)$ היא פונקציה גזירה) חייבת להיות נקודה בה הנגזרת מתאפסת, לכן אם נדע בכמה נקודות הנגזרת מתאפסת, נדע בכמה נקודות לכל היותר הפונקציה המקורית מתאפסת. בפרט, אם הנגזרת לא מתאפסת נדע שיש לכל היותר פתרון יחיד למשוואה.

נדגים זאת באמצעות הפונקציה שניתחנו בפרק 3, $f(x) = x^3 - 6\sqrt{x} + 2$. בפרק 3 ראינו באמצעות משפט ערך הביניים כי לפונקציה יש פתרון אחד בתחום $[0,1]$. ניתוח דומה ילמד אותנו שיש גם פתרון בתחום $[1,2]$, שכן $f(1) < 0$ ואילו $f(2) > 0$. לכן, למשוואה $f(x) = 0$ יש **לפחות** שני פתרונות. מצד שני, $f'(x) = 3x^2 - \frac{6}{2\sqrt{x}}$, ואם נדרוש $f'(x) = 0$ נקבל את המשוואה $x^2 - \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ שלה יש פתרון יחיד, $x = 1$. לכן, למשוואה המקורית יש **לכל היותר** שני פתרונות וביחד עם החישוב הקודם, יש לה **בדיוק** שני פתרונות. אם היה פתרון נוסף (שלישי), הנגזרת הייתה צריכה להתאפס בעוד נקודה וראינו שזה בלתי אפשרי.

4.4 כלל לופיטל

בפרק 2 ראינו שאריתמטיקה של גבולות (משפט 2.1) היא כלי מאוד נוח לחישוב גבולות של פונקציות הבנויות מפעולות חשבון על פונקציות אחרות פשוטות יותר, אבל היא לא תמיד עובדת. למשל, גבולות מהצורה $\frac{0}{0}$ (כלומר, גבולות מהצורה $\frac{f(x)}{g(x)}$ כאשר גם המונה וגם המכנה שואפים לאפס בנקודה) לא ניתנים לפתרון באמצעות חשבון גבולות ונדרשות שיטות אחרות בכדי לחשב אותן. כלל לופיטל הוא כלי נוסף ומאוד שימושי לחישוב גבולות מהצורה הזו (ומצורות דומות, כפי שנראה בהמשך) כאשר שתי הפונקציות $f(x), g(x)$ גזירות בנקודה.

הרעיון הבסיסי של כלל לופיטל מתבסס על כך שכפי שהערנו בתחילת הפרק, פונקציה גזירה היא בקירוב טוב קו ישר בסביבת הנקודה הרלוונטית. נניח אם כך כי $f(x), g(x)$ פונקציות גזירות בנקודה כלשהי x_0 ומתקיים $f(x), g(x) \to 0$ שם (לכן $f(x_0) = g(x_0) = 0$). מכאן נקבל שמשוואת המשיק ל-f בנקודה x_0 היא $y_f(x) = f'(x_0)(x - x_0)$ ומשוואת המשיק ל-g בנקודה x_0 היא $y_g(x) = g'(x_0)(x - x_0)$. מכאן, אם נחשב את הגבול ונציב במקום הפונקציות את הישרים המשיקים (שכמעט מזדהים עם הפונקציה סביב הנקודה x_0) נקבל (עם מעט אי דיוקים שנתעלם מהם כרגע לטובת הבהירות):

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x_0)(x - x_0)}{g'(x_0)(x - x_0)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

כלומר, כדי לחשב את המנה של הגבול של הפונקציות מהצורה $\frac{0}{0}$ אפשר לחשב את המנה של הנגזרות של הפונקציות במקום. הניסוח המלא והמדוייק של כלל לופיטל מופיע במשפט הבא:

משפט 4.6 (כלל לופיטל). תהיינה $f(x), g(x)$ שתי פונקציות הגזירות בסביבת הנקודה x_0 ונניח שמתקיים:

1. $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = a$ כאשר $a = 0$ או $|a| = \infty$.
2. $g'(x) \neq 0$ בסביבה כלשהי של x_0.
3. הגבול $L = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ קיים.

אזי מתקיים $L = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$.

(המשפט נכון גם כאשר $x_0 = \pm\infty$)

כלומר, אם הגבול $\frac{f(x)}{g(x)}$ הוא $\frac{0}{0}$ או $\frac{\infty}{\infty}$ (אולי אחד מהם או שניהם הוא $-\infty$), ואם הנגזרת $g'(x)$ לא מתאפסת סביב x_0 וגבול מנת הנגזרות קיים ב-x_0, אז הגבול של מנת הפונקציות שווה לגבול מנת הנגזרות. כלומר, כלל לופיטל מאפשר להמיר גבול אחד בעייתי בגבול אחר שאולי כבר לא בעייתי (כי אולי הנגזרות כבר לא שואפות לאפס או אינסוף) או פשוט יותר (כי הנגזרות פשוטות יותר).

לדוגמא, נניח כי $f(x) = e^x - 1, g(x) = x$ ונתבונן בגבול $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$. הן המונה והן המכנה שואפים ל-0 ולכן לא ניתן להשתמש בחשבון גבולות כרגיל. יחד עם זאת, $g'(x) = 1 \neq 0$ ולכן אם הגבול $\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ קיים וסופי, אז הוא שווה לגבול המקורי. נבדוק זאת: $\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{1} = 1$ ולכן לפי כלל לופיטל נקבל $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

חשוב לשים לב לכמה נקודות חשובות. ראשית, כדי להשתמש במשפט (וזה נכון לכל משפט) צריך לוודא שהתנאים מתקיימים. בפרט, צריך לוודא שהגבול של הנגזרות אכן קיים ורק אחרי הבדיקה (ווידוא ששאר התנאים מתקיימים) אפשר לטעון שהגבול המקורי קיים. כלומר, לא ניתן לבצע מעבר מהצורה $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$ ולהצדיק אותו בדיעבד אחרי שחושב הגבול של הנגזרות.

שנית, הגזירה של המכנה והמונה מתבצעת בנפרד. אין מדובר על חישוב של הגבול של $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'$.

שלישית, עם קצת מאמץ אלגברי, כלל לופיטל מתאים לחישוב גבולות בעייתיים נוספים. למשל, אם $f(x) \to 1, g(x) \to \infty$ אז הגבול f^g הוא גבול מהצורה 1^∞ שלא ניתן לחשב

אותו בעזרת אריתמטיקה של גבולות. אבל, $f^g = e^{g\ln f}$ והמעריך הוא $\frac{\ln f}{1/g}$ שהוא גבול מהצורה $\frac{0}{0}$, עליו ניתן להפעיל את משפט לופיטל.

רביעית, כאשר מחשבים את הגבול של הנגזרות, ייתכן ששוב נקבל גבול בעייתי. לשם כך, אפשר להפעיל את כלל לופיטל שנית על הגבול של הנגזרות במידה והן מקיימות את התנאים האחרים והן גזירות.

דוגמא 4.5. חשבו את הגבול $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+x^2-5x+3}{\ln^2(x)}$.

פתרון. נסמן את המונה ב-$f(x)$ ואת המכנה ב-$g(x)$. כאשר $x\to 1$ שניהם שואפים ל-0 ולכן הגבול מתאים לכלל לופיטל. בנוסף, $g'(x)=\frac{2\ln(x)}{x}$ ומתקיים $g'(x)\neq 0$ לכל $x\neq 1$. נבדוק את הגבול של הנגזרות:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2+2x-5}{2\ln(x)/x}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^3+2x^2-5x}{2\ln(x)}$$

גם עכשיו המונה והמכנה שואפים ל-0 והתנאים של המשפט מתקיימים, לכן נבחן את הנגזרות:

$$\lim_{x\to 1}\frac{(3x^3+2x^2-5x)'}{(2\ln(x))'}=\lim_{x\to 1}\frac{9x^2+4x-5}{2/x}=\frac{9+4-5}{2}=4$$

ולכן לפי משפט לופיטל (פעמיים) זה גם הגבול המקורי. ■

תרגיל 4.5. חשבו את הגבולות הבאים:

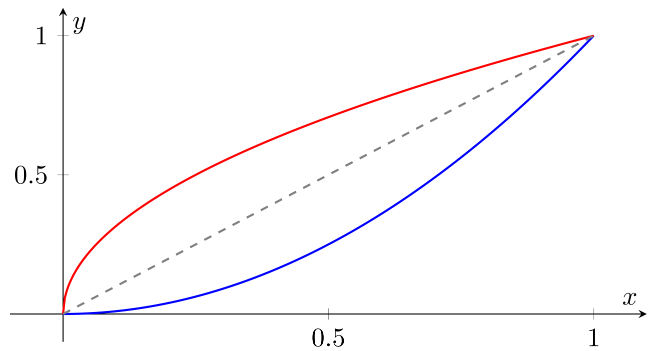
1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2-x+3}{2x^2-7x+1}$.
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^x}$.
3. $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1+\ln(x)}{x}$.
4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}$.
5. $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x$.
6. $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)^{\frac{1}{x-2}}$.

4.5 קמירות וקעירות

עד כה ראינו השפעה אחת של הנגזרת על הפונקציה דרך הסימן שלה. כאשר הנגזרת חיובית הפונקציה עולה, כאשר שלילית יורדת וכאשר היא אפס אולי זו נקודת קיצון. אבל גם לערכים של הנגזרת, וליתר דיוק לשינוי בערכים של הנגזרת, יש השפעה על הצורה של הפונקציה. כדי להמחיש את ההבדל, נתבונן בשתי הפונקציות $f(x)=x^2$ ו-$g(x)=\sqrt{x}$. שתיהן פונקציות עולות בתחום $x\geq 0$ אבל יש הבדל מהותי ביניהן כפי שניתן לראות באיור 4.8.

הפונקציה $g(x)$ יכולה למשל לתאר את האושר (ביחידות כלשהן) של אדם כלשהו מהעושר שלו (במיליוני ש"ח). כאשר אדם שאין לו כלום ($x=0$) מקבל $100,000$ ש"ח ($x=0.1$) האושר שלו עולה מ-$g(0)=0$ ל-$g(0.1)=0.31$. לעומת זאת, כאשר נותנים לו עוד $100,000$ ש"ח, האושר שלו עולה בשיעור קטן יותר, מ-$g(0.1)=0.31$ ל-$g(0.2)=0.45$. ה-$100,000$ ש"ח הראשונים שהוא קיבל שינו משמעותית את מצבו והגדילו את האושר שלו הרבה יותר מאשר ה-$100,000$ ש"ח השניים, ובאופן כללי, התועלת הנוספת ("תועלת שולית") שהוא מפיק מכל שקל נוסף הולכת ופוחתת ככל ששווי הנכסים שלו גדול יותר.

באופן דומה, עקומות למדיה נראות לרוב כמו הפונקציה $g(x)$, כאשר x מסמן את זמן הלמידה למבחן ו-$g(x)$ את הציון. אחרי השעה הראשונה של המבחן עוברים ממצב שלא יודעים כלום ליודעים קצת, ואפשר לקושש כמה נקודות. לעומת זאת, אחרי הרבה שעות של



איור 4.8: השוואה בין הפונקציה x^2 (כחול) לפונקציה $\sqrt{x}$ (אדום).

למידה, כבר יודעים די טוב את החומר ותוספת הציון שמפיקים מללמוד עוד שעה כבר לא תהיה גדולה.

הפונקציה $f(x)$, לעומת זאת, יכולה לתאר למשל את העלות שהמפעל משלם כאשר הוא מייצר x מוצרים. ככל שרוצים לייצר יותר מוצרים, צריך להפעיל יותר קווי יצור, יותר פועלים ולשלם לפועלים שכר גדול יותר בגלל שעות נוספות. לכן, לייצר 2000 יחידות ממוצר מסויים יעלה יותר מאשר כפליים העלות של לייצר 1000 יחידות מהמוצר, שכן ייצור היחידה ה-1001 עולה יותר מאשר ייצור היחידה הראשונה.

בדומה, פונקציות מהצורה $f(x)$ מתארות מאמץ, למשל בהקשרים של ספורט או ריצה. המאמץ שנדרש להשקיע כדי לרוץ קילומטר אחד הוא לא גבוה במיוחד, אבל המאמץ שנדרש להשקיע לרוץ קילומטר אחד אחרי שרצנו כבר 20 ק"מ הוא משמעותי. לרוץ מרתון זה הרבה יותר קשה מאשר כפליים המאמץ של ריצת חצי מרתון. ההגדרה הבאה מכלילה את שני סוגי הפונקציות.

לסיכום, בפונקציות מהצורה של $f(x)$ בהן המאמץ השולי הולך וגדל, מתקיים שלמעשה הנגזרת הולכת וגדלה כלומר הנגזרת השנייה חיובית. פונקציות כאלו נקראות פונקציות קמורות. לעומתן, פונקציות מהצורה $g(x)$ מאופיינות בתועלת שולית פוחתת, כלומר נגזרת קטנה ולכן נגזרת שנייה שלילית. פונקציות כאלו נקראות פונקציות קעורות. ההגדרה הבאה מסכמת את הדיון

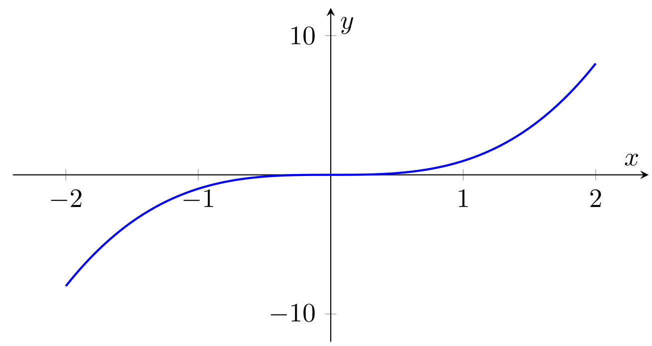
הגדרה 4.3 (הגדרת קמירות וקעירות בעזרת נגזרת שנייה)**.** תהי $f(x)$ פונקציה הגזירה פעמיים בנקודה x_0. הפונקציה נקראית קמורה ב-x_0 אם $f''(x_0) \geq 0$ וקעורה ב-x_0 אם $f''(x_0) \leq 0$.

אם הפונקציה מוגדרת בקטע מסויים $[a, b]$ (ייתכן שאינסופי) וקמורה (קעורה) בכל נקודה בו, נאמר שהפונקציה קמורה (קעורה) בקטע. פונקציה שקמורה (קעורה) בכל תחום הגדרתה פשוט תיקרא פונקציה קמורה (קעורה).

תרגיל 4.6. הוכיחו: $f(x)$ קמורה בנקודה x_0 אם ורק אם $-f(x)$ קעורה בנקודה x_0.

הנקודה בה הפונקציה עוברת מקמירות לקעירות (או מקעירות לקמירות) נקראת **נקודת פיתול**. לאור ההגדרה, בנקודת הפיתול בהכרח $f''(x_0) = 0$ אבל זה לא תנאי מספיק. למשל לפונקציה $f(x) = x^4$ אין נקודות פיתול ב-$x = 0$ למרות ש-$f''(0) = 0$. הסיבה היא ש-$f''(x) = 12x^2 \geq 0$ לכל x, כלומר הפונקציה הזו קמורה. לעומת זאת, הפונקציה $g(x) = x^3$ קמורה לכל $x > 0$, קעורה לכל $x < 0$ ובגלל שהנגזרת השניה משנה סימן ב-$x = 0$, הרי שנקודה זו היא נקודת פיתול של הפונקציה, ראו 4.9.

תרגיל 4.7. מצאו את תחומי הקמירות, תחומי הקעירות ונקודות הפיתול של הפונקציות הבאות:



איור 4.9: הפונקציה x^3: קמורה עבור $x > 0$, קעורה עבור $x < 0$ ועם נקודת פיתול ב-$x = 0$.

א. $f(x) = e^x$.

ב. $f(x) = \ln(x)$.

ג. $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$.

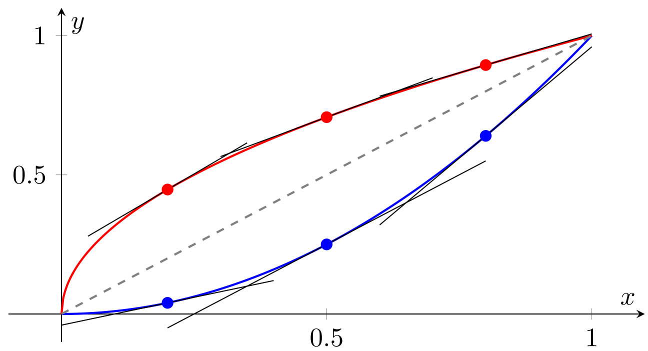
ד. $f(x) = x\ln(x)$.

הגדרה 4.3 נוחה מאוד לעבודה אבל מתבססת על כך שהפונקציה $f(x)$ גזירה פעמיים ובהרבה מקרים זו דרישה שלא מתקיימת. למשל הפונקציה $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$ לא גזירה בנקודה $x = 0$ (מדוע?) אבל יש לה את התכונה שהנגזרת הולכת וגדלה: עבור $x < 0$ הנגזרת היא $f'(x) = 0$ ועבור $x > 0$ הנגזרת היא $f'(x) = 1$, כך שהיינו רוצים להגיד שהפונקציה הזו היא קמורה (היא גם מזכירה יותר את הפונקציה הכחולה מאשר את האדומה באיור 4.8). זאת ועוד, הפונקציה $g(x) = -f(x)$ מתנהגת הפוך והיינו רוצים להגיד שהיא פונקציה קעורה, אבל אם נחשב לשתי הפונקציות את הנגזרת השניה, בכל נקודה בה הנגזרת השנייה קיימת מתקיים $f''(x) = g''(x) = 0$, כלומר מבחן הנגזרת השניה לא יודע להבחין בין הפונקציות מבחינת קמירות וקעירות - כל ה"אקשן" שקובע האם השיפוע מתחיל קטן ואז גדל או מתחיל גדול ואז קטן קורה בנקודה אחת, הנקודה $x = 0$ בה הפונקציה לא גזירה. לכן, נוסיף עוד שתי הגדרות של פונקציות קמורות וקעורות המתאימות גם למקרים בהם הפונקציה לא גזירה ושימושיות מאוד בכלכלה.

ההגדרה הראשונה שנוסיף, הגדרה 4.4 מניחה שהפונקציה גזירה רק פעם אחת, בניגוד להגדרה 4.3 שמניחה שהפונקציה גזירה פעמיים. ברוב השימושים הכלכליים, הפונקציות שנעסוק בהן יהיו חלקות (כלומר, גזירות אינסוף פעמים בנקודה) ולכן הגדרה 4.4 לא מאוד שימושית שכן כמעט תמיד כשהפונקציה גזירה פעם אחת, היא גם גזירה פעמיים ואפשר להשתמש בהגדרה 4.3. החשיבות של הגדרה 4.4 היא בעיקר בכך שהיא ממחישה מה הקשר בין המשיק לפונקציה קמורה או קעורה: פונקציה קמורה (קעורה) בנקודה מסויימת נמצאת מעל (מתחת) למשיק שלה בנקודה זו (ראו איור 4.10).

הגדרה 4.4 (הגדרת קמירות וקעירות בעזרת המשיק)**.** תהי $f(x)$ פונקציה הגזירה פעם אחת בנקודה x_0 ונסמן ב-$y(x)$ את המשיק לפונקציה בנקודה. הפונקציה נקראית קמורה ב-x_0 אם $f(x) \geq y(x)$ בסביבה כלשהי של x_0 וקעורה ב-x_0 אם $y(x) \geq f(x)$ בסביבה כלשהי של x_0.

הרעיון מאחורי הגדרה 4.4 הוא שפונקציה קמורה היא פונקציה שקצב הגידול שלה הולך וגדל (בהגדרה הקודמת דרשנו $f''(x_0) \geq 0$). היות ובנקודת ההשקה השיפוע של הפונקציה



איור 4.10: איור 4.8 עם משיקים לשתי הפונקציות במספר נקודות. בהתאם להגדרה 4.4, המשיקים לפונקציה הקמורה (כחולה) נמצאים מתחת לפונקציה ואילו המשיקים לפונקציה הקעורה (אדומה) נמצאים מעל הפונקציה.

ושל המשיק שווים, והיות וקצב הגדילה של הפונקציה הולך וגדל (ושל המשיק, בהיותו קו ישר, נשאר קבוע), הרי שהפונקציה עולה יותר מהר מאשר המשיק ותהיה מעליו. הטיעון ההפוך עובד עבור פונקציה קעורה, שתמיד תהיה מתחת למשיק בנקודת ההשקה כי קצב הגידול שלה הולך וקטן ולכן היא עולה יותר לאט מאשר המשיק.

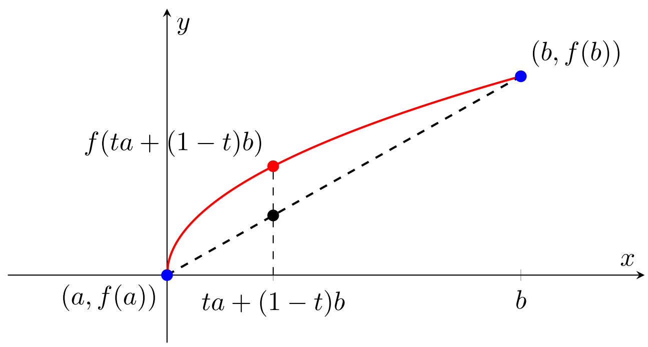
ההגדרה השלישית היא השימושית ביותר והיא גם הכללית ביותר שכן היא אינה נסמכת על גזירות ואפילו לא על רציפות. הרעיון הוא כזה: אם ניקח שתי נקודות על גבי פונקציה קעורה ונחבר אותן, הישר שיתקבל (המיתר) יהיה מתחת לפונקציה. אפשר לראות זאת באיור 4.8: את מחברים את שתי הנקודות $(0,0)$ ו-$(1,1)$ שנמצאות על הפונקציה הקעורה (האדומה) נקבל את הקו המקווקו שעובר כולו מתחת לפונקציה האדומה. ולהפך - חיבור שתי נקודות על פונקציה קמורה ייצור קו ישר שנמצא כולו מעל הפונקציה.

כדי להבין למה ההגדרה הזו מתאימה לפונקציה קעורה, נסתכל על חיתוך בין קו ישר כלשהו לבין הפונקציה. אם אחרי נקודת החיתוך הפונקציה תהיה מתחת לישר, הרי שבהיותה פונקציה קעורה, קצב הגידול שלה ילך ויפחת בעוד שקצב הגידול של הישר יישאר קבוע, ולכן היא תמשיך להיות מתחת לישר והישר "ייברח לה". כזה ישר לא יכול לפגוש את הפונקציה בהמשך כי היא תמיד תהיה מתחתיו. לכן, אם משרטטים ישר שחותך את הפונקציה הקעורה בנקודה נוספת, הדבר היחיד שמבטיח פגישה נוספת היא שהפונקציה נמצאת מעל הקו הישר הזה בין שתי נקודות החיתוך.

הגדרה 4.5 (הגדרת קמירות וקעירות בעזרת מיתר)**.** תהי פונקציה $f(x)$ המוגדרת בקטע $[a,b]$. הפונקציה קעורה בקטע $[a,b]$ אם לכל צמד נקודות $x_1,x_2\in[a,b]$ המיתר המחבר את הנקודות $(x_1,f(x_1))$ ו-$(x_2,f(x_2))$ נמצא מתחת לפונקציה. בסימונים: לכל $t\in(0,1)$ מתקיים: $f(tx_1+(1-t)x_2)\geq tf(x_1)+(1-t)f(x_2)$.

נפרק את הביטוי האחרון שמופיע בהגדרה. ראשית נעיר כי אם X,Y הם שני מספרים, ואם $t\in[0,1]$ אז $tX+(1-t)Y$ הוא ממוצע משוקלל שלהם כאשר המשקל של X הוא t והמשקל של Y הוא היתר $(1-t)$. למשל אם $t=1/2$ נקבל שהמשקל זהה ונקבל את הנוסחא הרגילה לממוצע, ואם $t=1/4$ אז זה ממוצע משוקלל שבו Y חשוב פי 3 מאשר X. לכן בהגדרה מופיעים שני ממוצעים: $tx_1+(1-t)x_2$ הוא ממוצע הנקודות x_1,x_2 ואילו $tf(x_1)+(1-t)f(x_2)$ הוא ממוצע ערכי ה-f של x_1,x_2. הממוצע האחרון נמצא על הקו הישר המחבר את שתי הנקודות ועבור פונקציה קעורה, הערך שלה בערך ה-x המתאים צריך

להיות גבוה יותר, ראו איור 4.11.



איור 4.11: הישר המחבר את שתי הנקודות $(a, f(a))$ ו-$(b, f(b))$ נמצא תמיד מתחת לפונקציה הקעורה. בעזרת הפרמטר t אפשר לקבל כל נקודה ביניהן, החל מ-a (עבור $t = 1$) ועד b (עבור $t = 0$).

שימו לב שהגדרה 4.5 שונה מהותית מאשר הגדרות 4.3 ו-4.4, שכן לא ניתן להפעיל אותה בנקודה מסויימת. הגדרה זו תמיד דורשת שתי נקודות והתוצאה היא פונקציה שקמורה או קעורה בכל הקטע. לעומת זאת, שתי ההגדרות האחרות עוסקות בקמירות או קעירות בנקודה מסויימת, וההכללה לקמירות וקעירות בקטע מתקבלת על ידי זה שהתכונה מתקיימת באופן נקודתי בכל נקודה בקטע. יחד עם זאת, ניתן להראות שכאשר מתקיימים התנאים המתאימים כל ההגדרות שקולות. כך למשל, פונקציה גזירה פעמיים היא קמורה לפי הגדרה 4.3 אם ורק אם היא קמורה לפי הגדרה 4.5.

דוגמא 4.6 (שנאת סיכון)**.** בהמשך לפתיחת הפרק, פונקציית האושר של אדם ביחידות כלשהן במיליוני ש"ח היא $g(x) = \sqrt{x}$. לאדם זה מציעים אחת משתי אפשרויות:

1. לקבל חצי מיליון ש"ח.
2. להשתתף בהגרלה שבה מקבלים מיליון ש"ח בסיכוי חצי, ואחרת לא מקבלים כלום.

מה הוא יעדיף?

פתרון. נחשב את האושר הממוצע שלו בשני המקרים. במקרה שהוא מקבל חצי מיליון ש"ח וזהו, האושר שלו יהיה $g(0.5) = 0.7$. לעומת זאת, אם יזכה בהגרלה האושר שלו יהיה $g(1) = 1$ ואם לא יזכה האושר שלו יהיה $g(0) = 0$. לכן רמת האושר הממוצעת שלו אחרי ההגרלה תהיה $\frac{1}{2}g(0) + \frac{1}{2}g(1) = \frac{1}{2} < g(0.5)$. כלומר - אם נמצע את האושר שלו על פני שתי האפשרויות (זכיה והפסד) נקבל ערך יותר נמוך מאשר אם הוא יבחר לקחת פחות כסף אבל בצורה בטוחה.

דבר זה ניתן להכללה. נניח שהוא יכול לזכות במיליון בסיכוי $1 - t$ ואחרת הוא לא יקבל כלום, ולחילופין לקבל $1 - t$ מיליון ש"ח בלי הגרלה, כאשר $t \in [0, 1]$. רמת האושר הממוצעת שלו אם ישתתף בהגרלה תהיה $tg(0) + (1-t)g(1)$ ואילו רמת האושר שלו אם יבחר לקבל $1 - t$ תהיה $g(t \cdot 0 + (1-t) \cdot 1)$. אלו בדיוק שני הביטויים המופיעים בהגדרה 4.5 ומאחר והפונקציה $g(x)$ היא פונקציה קעורה, מתקיים $g(1-t) > tg(0) + (1-t)g(1)$, כלומר האושר שלו מקבלת הממוצע הכספי של הזכיות בוודאות יותר גדול מאשר ממוצע האושר שלו אם ישתתף בהגרלה.

אדם עם פונקציית אושר כזו (קעורה) נקרא שונא סיכון - כי הוא מעדיף לקחת את הסכום הודאי מאשר להשתתף בהגרלה. אם פונקציית האושר שלו הייתה קמורה, היינו מקבלים בדיוק את התוצאה ההפוכה: הוא היה מפיק יותר אושר (בממוצע) מהשתתפות בהגרלה מאשר בלקבל פרס כספי מובטח. ■

הדוגמא האחרונה ממחישה את החשיבות של הגדרות הקמירות והקעירות והשימושים שלהן בכלכלה, בתורת התועלת ותורת ההחלטות העוסקת באופן בו אנשים מקבלים החלטות בתנאי חוסר ודאות. למשל, אנשים הם שונאי סיכון כאשר מדובר על הפסדים ועל סכומים גדולים. הרעיון של ביטוח מתבסס על כך - החיים הם בעצם הגרלה בו בכל חודש יכולים לגנוב לאדם כלשהו את האוטו בסיכוי כלשהו ואז ייגרם לו נזק גדול או שלא יגנבו לו את האוטו ואז לא ייגרם לו נזק כלל. לחילופין, האדם יכול לרכוש ביטוח, כלומר לשלם סכום מסויים (ובכך לספוג נזק מסויים) בוודאות, אבל לדעת שאם יגנבו לו את האוטו חברת הביטוח תחזיר לו את כל הכסף ולא ייגרם לו נזק נוסף. אדם זה, בהיותו שונא סיכון, יעדיף כפי שראינו לשלם קצת בוודאות מאשר להשתתף בהגרלה. שימו לב שאת החישוב המדוייק של "מהי הפרמיה הנכונה" תלוי בכל הפרמטרים של הבעיה (הסיכוי שיגנבו את האוטו ופונקציית התועלת) אבל את העובדה שיש כזו פרמיה ושהרעיון של ביטוח יכול לעבוד הצלחנו להמחיש רק באמצעות הידיעה שפונקציית התועלת של אדם היא קעורה, בלי לדעת בדיוק איך היא נראית או מה הנוסחא שלה.

שימוש נוסף בקמירות וקעירות היא בבעיות אופטימזציה, כאשר מחפשים נקודות קיצון של פונקציה. לשם הפשטות נדון בפונקציות קעורות ונשתמש בהגדרה 4.3 - הדיון בפונקציות קמורות או בהגדרות אחרות דומה. תהי אם כך $f(x)$ פונקציה קעורה חזק[5] בקטע $[a,b]$. לכן $f''(x)<0$ לכן הפונקציה $f'(x)$ היא פונקציה יורדת ויש לכל היותר נקודה אחת בה $f'(x)=0$. מצד שני, פונקציה זו רציפה בקטע סגור ולכן בוודאות מקבלת מקסימום, לכן לפונקציה קעורה חזק יש בדיוק נקודת מקסימום אחת. יתרה מזאת, עד הנקודה בה הנגזרת מתאפסת (אם יש כזו) הפונקציה עולה (כי הנגזרת חיובית) ואחריה יורדת (כי הנגזרת שלילית) לכן הנקודות היחידות שיכולות להיות נקודות המינימום של הפונקציה הן קצוות הקטע: $x=a$ או $x=b$.

המסקנה היא שאנחנו יכולים לדעת הרבה על נקודות הקיצון של הפונקציה אם אנחנו יודעים שהיא קמורה או קעורה משיקולים אחרים או בגלל הנחות של המודל, גם בלי שהנוסחא שמתארת את הפונקציה תהיה ידועה ובלי שנצטרך לבצע את האלגברה המתבקשת. למשל, אם $f(x)$ היא העלות שהמפעל משלם כאשר הוא מייצר $x\in[0,10,000]$ מוצרים, ו-p הוא המחיר של כל מוצר, אז הרווח של המפעל כאשר הוא מייצר x מוצרים הוא $px-f(x)$. הסברנו מקודם שניתן להניח ש-$f(x)$ היא פונקציה קמורה ולכן $px-f(x)$ היא פונקציה קעורה ולכן יש רק כמות מוצרים אחת בתחום שממקסמת את הרווח של המפעל.

תרגיל 4.8. לפונקציה קעורה חזק בקטע סגור יש נקודת מקסימום אחת והמינימום המוחלט מתקבל באחת מהקצוות. נסחו את הטענה המקבילה עבור פונקציה קמורה.

תרגיל 4.9. הוכיחו מחדש את הטענה עבור פונקציות קעורות חזק ורציפות תוך שימוש בהגדרה 4.5, מבלי להשתמש בעובדה שהפונקציה גזירה.

תרגיל 4.10. הוכיחו שאם $f(x)$ היא פונקציה קמורה וגזירה פעמיים ואם $p\in\mathbb{R}$ אז $g(x)=px-f(x)$ היא פונקציה קעורה.

4.6 תרגילים מסכמים

תרגיל 4.11. גזרו את הפונקציות הבאות:

[5] כלומר שאי-השוויון בהגדרה 4.3 הוא אי שוויון חזק.

1. $f(x) = (2x-7)^{20}$.
2. $f(x) = (\sqrt{x} + 1/\sqrt{x})^{10}$.
3. $f(x) = \ln(a^2 - x^2)$.
4. $f(x) = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-9} - \ln(x + \sqrt{x^2-9})$.
5. $f(x) = \frac{x^4-x^2+2}{x\sqrt{x}}$.
6. $f(x) = (x+\sqrt{x})^{1/3}$.
7. $f(x) = \frac{x(2x-3)^5}{e^{3x^2+1}}$.

תרגיל 4.12. מצאו את תחומי העליה, הירידה ואת נקודות הקיצון של הפונקציות הבאות:

1. $f(x) = \frac{x^2+4x+4}{x+3}$.
2. $f(x) = -x^3 + 9x^2 + 81x$.
3. $f(x) = x^4 - 2x^2$.
4. $f(x) = x^5/5 - 2x^3/3 + x + 3$.
5. $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.
6. $f(x) = xe^{-3x}$.
7. $f(x) = \frac{1-x}{x^2}$.
8. $f(x) = 2x - 3x^{2/3}$.
9. $f(x) = -x^3(x-2)^2$.
10. $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$.

תרגיל 4.13. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$. הוכיחו שמתקיים לכל x:

$$2(f'(x))^2 - f(x)\cdot f''(x) = 2f^3(x)$$

תרגיל 4.14. נתונה פונקציה $f(x)$ המקיימת $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \ln(x)$. חשבו את הנגזרת של הפונקציה $g(x) = \frac{x}{9-x^2} - f(2x^2/3)$.

תרגיל 4.15. חשבו את הגבולות הבאים:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}$.
2. $\lim\limits_{x\to1^-} \ln(x)\ln(1-x)$.
3. $\lim\limits_{x\to0^+} x^n\ln(x)$ כאשר $n\in\mathbb{N}$.
4. $\lim\limits_{x\to1} x^{\frac{1}{1-x}}$.
5. $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)}\right)$.
6. $\lim\limits_{x\to0} \frac{(e^x-1)(e^{2x}-1)}{x^2}$.
7. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+\ln(x)}{x\ln(x)}$.
8. $\lim\limits_{x\to0} \frac{(1+x)^{1/3}-1-x/3}{x^2}$.
9. $\lim\limits_{x\to0}(e^x+3x)^{1/x}$.
10. $\lim\limits_{x\to0^+}(\ln(1/x))^x$.
11. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+2e^{-x})^{e^x+x}$.
12. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.
13. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x-1}{3x^2-3x-2}\right)^{1/x}$.
14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x+4}\right)^{\frac{x-1}{4}}$.

15. $\lim_{x\to 1}\left(\frac{3}{1-x^3}-\frac{2}{1-x^2}\right)$.

תרגיל 4.16. תהי פונקציה $f(x)$ רציפה בקטע $[0,2]$, גזירה בקטע $(0,2)$ ונתון $f(0)=0$ $-1, f(1)=4, f(2)=0$. הוכיחו כי ישנה נקודה $c\in(0,2)$ כך ש-$f'(c)=0$.
האם הטענה נכונה גם אם לא נתון שהפונקציה רציפה בקטע $[0,2]$?

תרגיל 4.17. נתבונן במשוואה $\ln(x^2+2x+0.5)=x$.

1. הוכיחו כי למשוואה יש לפחות 2 פתרונות בקטע $[0,10]$.
2. הוכיחו כי למשוואה יש לכל היותר 2 פתרונות בקטע $[0,10]$.
3. הסיקו כי למשוואה יש בדיוק 2 פתרונות בקטע $[0,10]$.
4. מצאו את שתי הספרות הראשונות של הפתרון בקטע $[0,1]$ באמצעות שיטת החציה.

תרגיל 4.18. הוכיחו כי למשוואות הבאות יש פתרון יחיד:

1. $x^5/5+x^3+2x=6$.
2. $e^x-x^2=3$.
3. $2x^3=5-2x$.

תרגיל 4.19. מצאו את תחומי הקמירות, הקעירות ונקודות הפיתול של הפונקציות הבאות:

1. $f(x)=e^{-x^2}$.
2. $f(x)=x^3-6x^2+12x+4$.
3. $f(x)=(1+x^2)e^x$.

תרגיל 4.20. מצאו את המקסימום והמינימום המוחלטים של הפונקציות הבאות:

1. $f(x)=x^3+3x^2-72x+90$ בקטע $[-5,5]$.
2. $f(x)=3x^4+4x^3-12x^2$ בקטע $[-3,2]$.
3. $f(x)=x^2(6x-7)^{1/3}$ בקטע $[-1,2]$.

תרגיל 4.21. חקרו את הפונקציה $f(x)=\frac{x^3}{12-x^2}$ לפי הסעיפים הבאים:

1. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.
2. מצאו את נקודות החיתוך עם הצירים.
3. מצאו את תחומי העליה והירידה של הפונקציה.
4. מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה.
5. מצאו את תחומי הקמירות, הקעירות ונקודות הפיתול של הפונקציה.
6. מצאו את האסימפטוטות של הפונקציה.

שרטטו את הפונקציה על ספך חקירה זו.

5 אינטגרלים

5.1 האינטגרל הלא מסויים

הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ מחשבת את קצב הגידול הרגעי של הפונקציה. למשל אם $f(x)$ הוא המחיר של מוצר מסויים בזמן x, אז $f'(x)$ הוא קצב השינוי במחיר המוצר. לעיתים נרצה לעשות את התהליך ההפוך - אנחנו יודעים מה היה המחיר של המוצר לפני שנה וכמה המחיר השתנה בכל חודש, ומעוניינים לדעת את המחיר כיום. כלומר, אנחנו מעוניינים למצוא את הפעולה ההפוכה, שלוקחת את השינוי הרגעי $f'(x)$ ומוצאת את הפונקציה המתאימה $f(x)$. פעולה זו נקראית האינטגרל הלא מסויים של הפונקציה, או בקיצור, **האינטגרל** של הפונקציה.

הגדרה 5.1. תהי $f(x)$ פונקציה. אם קיימת פונקציה $F(x)$ כך ש-$F'(x) = f(x)$ לכל x, אזי נקרא ל-$F(x)$ **הפונקציה הקדומה** לפונקציה $f(x)$ או **האינטגרל הלא מסויים** של $f(x)$, ונסמן

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x$$

בהמשך נסביר את המשמעות של הסימון.

יש שלוש בעיות בחישוב אינטגרלים של פונקציות. ראשית, לא כל פונקציה היא אינטגרבילית (דהיינו, ניתן לחשב אינטגרל שלה). זה לא מפתיע כי ראינו שיש פונקציות שאינן גזירות ולכן הגיוני שגם לא כל פונקציה תהיה נגזרת של משהו. שנית, גם אם פונקציה היא אינטגרבילית, לא בהכרח שהאינטגרל שלה היא פונקציה אלמנטרית. למשל, הפונקציה $e^{-x^2/2}$ היא פונקציה אינטגרבילית, כלומר קיימת פונקציה $\Phi(x)$ המקיימת $\Phi'(x) = e^{-x^2/2}$, אבל לא ניתן לרשום את הפונקציה $\Phi(x)$ בתור נוסחא הכוללת את ארבעת פעולות חשבון וכן הפונקציות $\ln,\exp$ וכד'.[6]

הבעיה השלישית היא שלא ברור כיצד לחשב אינטגרלים. שימו לב שיש הבדל מהותי בין הגדרת הנגזרת (הגדרה 4.1) והגדרת האינטגרל. הגדרת הנגזרת היא הגדרה קונסטרוקטיבית, המביעה את הנגזרת בתור גבול של ביטוי שניתן לחשב אותו. לעומת זאת, הגדרת האינטגרל היא לא הגדרה מפורשת ואין ביטוי שצריך לחשב כדי למצוא את האינטגרל של פונקציה מסויימת, אלא במקום זאת צריך להמציא פונקציה $F(x)$ כך שיתקיים $F'(x) = f(x)$. עיקר הפרק אם כך יהיה במציאת טכניקות בעזרתן נמציא פונקציות קדומות לפונקציות נתונות.

מאחר ואינטגרל היא הפעולה ההפוכה לנגזרת, השיטות שיש לנו נגזרות מתוך חישובי הנגזרת. כל תרגיל של גזירה, אם קוראים אותו מהסוף להתחלה, הוא בעצם תרגיל של נגזרת. למשל, ראינו שמתקיים $(x^2)' = 2x$ ולכן $\int 2x\mathrm{d}x = x^2$. בנוסף, ראינו שמתקיים $(x^2+5)' = 2x$ ולכן גם $\int 2x\mathrm{d}x = x^2 + 5$. הסיבה היא שאם מוסיפים קבוע לפונקציה, הוא לא משנה את השיפוע של הפונקציה אלא רק מזיז אותה למעלה ולמטה ביחס לציר ה-x. לכן, לכל פונקציה יש למעשה אינסוף אינטגרלים בלתי מסויימים, וכל הפונקציות נבדלות זו מזו בקבוע. לכן, אם $F'(x) = f(x)$ נרשום $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$ כאשר המשמעות של ה-C היא שאפשר להוסיף ל-$F(x)$ כל מספר ממשי ולקבל פונקציה קדומה אחרת של $f(x)$.

באופן דומה, נקבל בהתאם למשפט 4.1 את האינטגרלים של הפונקציות האלמנטריות:

משפט 5.1. אינטגרלים לא מסויימים של פונקציות אלמנטריות:

1. $\int x^p \mathrm{d}x = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C$ לכל $-1 \neq p \in \mathbb{R}$.

[6] הפונקציה $e^{-x^2/2}$ מתארת צפיפות הסתברות של משתנה מקרי נורמלי סטנדרטי ומופיעה בקורס בהסתברות וסטטיסטיקה. לאינטגרל של הפונקציה יש משמעות והוא חשוב, אבל בגלל שאין נוסחא שמביעה אותו אי אפשר לחשב אותו ובמקום זאת משתמשים בטבלה הכוללת את הערכים של $\Phi(x)$ שחושבו בקירוב על ידי מחשב.

2. $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln(x) + C$.
3. $\int e^x\mathrm{d}x = e^x + C$, ובאופן כללי לכל $1 \neq a > 0$: $\int a^x\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln(a)} + C$.
4. $\int \ln(x)\mathrm{d}x = x\ln(x) - x + C$ (ראו תרגיל 5.1).

באופן דומה, אפשר להשתמש בכללי הגזירה בשביל לחשב אינטגרלים. שני כללי הגזירה המיידיים הם נגזרת של סכום (או הפרש) וכפל בקבוע:

משפט 5.2 (כללי אינטגרציה)**.** תהיינה $f(x), g(x)$ שתי פונקציות אינטגרביליות. אזי

1. כפל בקבוע $a \in \mathbb{R}$: $\int cf(x)\mathrm{d}x = c\int f(x)\mathrm{d}x$.
2. סכום והפרש: $\int f(x) \pm g(x)\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x$.

5.1.1 אינטגרציה בחלקים

כללי הגזירה הנוספים המופיעים במשפט 4.2 עוסקים בנגזרת של מכפלה ומנה, ואינם ניתנים לשימוש לחישובי אינטגרל באופן פשוט כמו נגזרת של סכום וכפל בקבוע. ראשית, נחדד ונדגיש שמאחר ונגזרת של מכפלה היא לא מכפלת הנגזרות, גם אינטגרל של מכפלה הוא לא מכפלת האינטגרלים: $\int f(x)g(x)\mathrm{d}x \neq \int f(x)\mathrm{d}x \cdot \int g(x)\mathrm{d}x$. לכן, השימוש בנוסחת המכפלה כדי לחשב אינטגרלים הוא קצת אחר והשיטה המשתמשת בנוסחת המכפלה נקראת אינטגרציה בחלקים.

משפט 5.3 (אינטגרציה בחלקים)**.** תהיינה $f(x), g(x)$ שתי פונקציות ותהיינה $F(x), G(x)$ הקדומות שלהן בהתאמה. אזי מתקיים

$$\int f(x)G(x)\mathrm{d}x = F(x)G(x) - \int F(x)g(x)\mathrm{d}x$$

הוכחה. לפי נוסחת נגזרת של מכפלה, מתקיים

$$(F(x)G(x))' = F'(x)G(x) + F(x)G'(x) = f(x)G(x) + F(x)g(x)$$

נפעיל אינטגרל לא מסויים על שני אגפי המשוואה ונקבל

$$\int (F(x)G(x))'\mathrm{d}x = \int f(x)G(x) + F(x)g(x)\mathrm{d}x = \int f(x)G(x)\mathrm{d}x + \int F(x)g(x)\mathrm{d}x$$

מצד שני, מאחר ואינטגרל היא הפעולה ההפוכה לנגזרת, $\int (F(x)G(x))'\mathrm{d}x = F(x)G(x)$ (שימו לב שזה אינטגרל של נגזרת של מכפלה, לא אינטגרל של מכפלה של נגזרות) ואחרי העברת אגפים נקבל את הנוסחא שבמשפט. ■

נוסחת האינטגרציה בחלקים מאפשרת חישוב של אינטגרלים של מכפלה של שתי פונקציות. למעשה, הנוסחא ממירה בעיה של חישוב אינטגרל של מכפלה אחת של פונקציות ($f(x)G(x)$) במכפלה אחרת של פונקציות ($F(x)g(x)$), וכן בחישוב האינטגרל של $f(x)$ והנגזרת של $G(x)$. לכשעצמה, זו לא נראית כמו התקדמות משמעותית בדרך לפתרון, שהרי החלפנו אינטגרל אחד באחר. אבל, אם בוחרים את הפונקציות נכון, ייתכן והאינטגרל של $F(x)g(x)$ יהיה יותר קל לחישוב מאשר של $f(x)G(x)$, וזו אכן התקדמות.

דוגמא 5.1. חשבו את האינטגרל של הפונקציה xe^x.

פתרון. נגדיר $f(x) = e^x$, $G(x) = x$ ונשים לב כי $g(x) = G'(x) = 1$ וכן $F(x) = \int e^x \mathrm{d}x = e^x$. האינטגרל המבוקש הוא של הפונקציה $G(x)f(x)$ לכן ניעזר בנוסחת האינטגרציה בחלקים ונקבל:

$$\int xe^x \mathrm{d}x = xe^x - \int 1 \cdot e^x \mathrm{d}x = xe^x - e^x + C$$

קל לבדוק שהפתרון נכון על ידי גזירה:

$$(xe^x - e^x)' = e^x + xe^x - e^x = xe^x$$

■

במעבר בין אגף שמאל לאגף ימין של האינטגרציה בחלקים (בין $f(x)G(x)$ לבין $F(x)g(x)$), אחת הפונקציות במכפלה נגזרת ואילו לאחרת מחשבים אינטגרל. לכן, כאשר יש מחשבים אינטגרל של מכפלה של פונקציות באמצעות אינטגרציה בחלקים, נסמן ב-$f(x)$ את הפונקציה שקל לעשות לה אינטגרל וב-$G(x)$ את הפונקציה שמועיל לגזור. בדוגמא הזו, שתי הפונקציות היו x ו-e^x. לפונקציה e^x מאוד קל לחשב אינטגרל. את הפונקציה x מאוד מועיל לגזור, כי הנגזרת שלה היא 1 ומאחר וה-x נעלם, מקבלים ביטוי פשוט, כפי שרואים בפתרון. אם היינו בוחרים הפוך, קרי $f(x) = x$ ו-$G(x) = e^x$, היינו מקבלים ביטוי יותר מסובך לחישוב:

$$\int xe^x \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}e^x - \int \frac{x^2}{2}e^x \mathrm{d}x$$

לכן, לא מספיק לזהות שהאינטגרל הוא אינטגרל של מכפלה שכדאי לנסות לפתור בעזרת אינטגרציה בחלקים, צריך גם להבין איזו מהפונקציות היא הפונקציה $f(x)$ לה מחשבים את האינטגרל ואיזו פונקציה היא $G(x)$ לה מחשבים את הנגזרת.

תרגיל 5.1. חשבו את האינטגרלים הבאים:

1. $\int 4x^5 \mathrm{d}x$.
2. $\int x^2 \pm \frac{1}{x} \mathrm{d}x$.
3. $\int x^2 e^x \mathrm{d}x$.
4. $\int \ln(x) \mathrm{d}x$. רמז: השתמשו בנוסחת האינטגרציה בחלקים ושימו לב שמתקיים $\ln(x) = 1 \cdot \ln(x)$.
5. $\int (x^2-1)(x+2) \mathrm{d}x$.

בדקו את תשובותיכם באמצעות גזירה של הפונקציה הקדומה שמצאתם!

תרגיל 5.2. אמרנו שלכל פונקציה יש אינסוף פונקציות קדומות אבל כאשר עושים אינטגרציה בחלקים בוחרים אחת מהן עבור הקדומה של $f(x)$. למשל, בדוגמא 5.1 בחרנו בקדומה של $f(x) = e^x$ להיות $F(x) = e^x$. מה היה קורה אם היינו בוחרים בפונקציה קדומה אחרת, למשל $F(x) = e^x + 5$? חזרו על החישוב והכלילו את המסקנה.

5.1.2 שיטת ההצבה (החלפת משתנים)

שיטה נוספת לחישוב אינטגרלים אנחנו מקבלים מכלל השרשרת (משפט 4.3) עבור הרכבה של פונקציות. הרעיון המרכזי הוא שכאשר מנסים לחשב אינטגרל של פונקציה מורכבת מהצורה $f \circ g(x)$, אם נסמן $y = g(x)$ נקבל פונקציה פשוטה יותר מהצורה $f(y)$. למשל,

במקום להתמודד עם הפונקציה $\frac{\ln^2(x)+1}{\ln(x)+3}$, נציב $y=\ln(x)$ ונקבל את הפונקציה $\frac{y^2+1}{y+3}$, שכן $f\circ g(x)=\frac{\ln^2(x)+1}{\ln(x)+3}$ כאשר $g(x)=\ln(x)$ ו-$f(y)=\frac{y^2+1}{y+3}$.

בפועל, החלפת המשתנים מעט יותר מורכבת כי היא מסתמכת על כלל השרשרת ולכן כוללת את הנגזרת הפנימית. נניח אם כך כי $F(y)$ היא הפונקציה הקדומה של $f(y)$, כלומר מתקיים $F(y)=\int f(y)\mathrm{d}y$. כעת נציב $y=g(x)$. מתקיים $F'(g(x))=f(g(x))g'(x)$ ולכן $F(g(x))=\int f(g(x))g'(x)\mathrm{d}x$. לכן, כאשר מחשבים אינטגרל מהצורה $\int f(g(x))g'(x)\mathrm{d}x$ אנחנו צריכים להציב $y=g(x)$ וכן $\mathrm{d}y=g'(x)\mathrm{d}x$. חידוד למשמעות המדוייקת של ההצבה האחרונה $\mathrm{d}y=g'(x)\mathrm{d}x$ נראה בפרק הבא כאשר נחשב את האינטגרל המסויים.

דוגמא 5.2. חשבו את האינטגרל $\int\frac{1}{x}\ln(x)\mathrm{d}x$.

פתרון. נשתמש בשיטת ההצבה ונציב $y=g(x)=\ln(x)$. לכן $\mathrm{d}y=g'(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ ומתקיים

$$\int\ln(x)\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\int y\mathrm{d}y=\frac{y^2}{2}+C$$

זו עדיין לא התשובה הסופית, שכן יש צורך לחזור למשתנה המקורי על ידי ההצבה $y=\ln(x)$: $\int\frac{1}{x}\ln(x)\mathrm{d}x=\frac{\ln^2(x)}{2}+C$. ניתן לוודא את התוצאה על ידי גזירת הפונקציה $\frac{\ln^2(x)}{2}$. ■

שיטת ההצבה נוחה כאשר (1) יש חלק "מסובך" באינטגרל שאם נסמן אותו ב-y נקבל אינטגרל פשוט יותר; (2) כאשר אפשר את כל ה-xים להפוך ל-y באיזושהי צורה לא מסובכת ו-(3) כאשר החישוב של $\mathrm{d}y=g'(x)\mathrm{d}x$ נוח ולא מסבך את האינטגרל עוד יותר. המשמעות של (2) היא שהמשמעות של (2) היא שכאשר מחליפים משתנים, אחרי המעבר מ-x ל-y באינטגרל יופיעו רק ה-yים, לא יכולים להופיע בו זמנית באותו השלב גם xים וגם yים. לגבי (3), בדוגמא האחרונה הנגזרת הפנימית הופיעה באופן מפורש בפונקציה כך שהיה נוח להחליף אותה ב-$\mathrm{d}y$, אבל זה לא בהכרח יקרה תמיד.

דוגמא 5.3. חשבו את האינטגרל $\int(4x-1)^5\mathrm{d}x$.

פתרון. זהו אינטגרל של פולינום לכן ברמת העקרון אפשר לפתוח סוגריים ולחשב את האינטגרל בקלות. יחד עם זאת, שיטת ההצבה חוסכת לנו זמן כאן. נציב $y=4x-1$ ולכן $\mathrm{d}y=4\mathrm{d}x$. הפעם, 4 לא מופיע בצורה מפורשת באינטגרל לכן נכפול ונחלק בו:

$$\int(4x-1)^5\mathrm{d}x=\int(4x-1)^5\frac{4}{4}\mathrm{d}x=\int y^5\frac{1}{4}\mathrm{d}y=\frac{1}{4}\cdot\frac{y^6}{6}+C=\frac{(4x-1)^6}{24}+C$$

גם כאן, כתמיד, כדאי לוודא את התשובה הסופית באמצעות גזירה. ■

תרגיל 5.3. חשבו את האינטגרלים הבאים:

1. $\int\frac{4}{2x+3}\mathrm{d}x$.
2. $\int\frac{\exp(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.
3. $\int\frac{2x+1}{x^2+x-2}\mathrm{d}x$.
4. $\int\frac{e^x}{1+e^x}\mathrm{d}x$.

5.1.3 תרגילים

חישוב אינטגרלים זה קשה. גם אם לפונקציה מסויימת יש פונקציה קדומה וניתן לחשב אותה בצורה אנליטית, לא ברור כיצד לגשת לחישוב. אם האינטגרל הוא לא מיידי (נגזרת

של פונקציה ידועה), שתי השיטות המרכזיות לחישוב הן שיטת ההצבה ואינטגרציה בחלקים. שיטת ההצבה מתאימה יותר כאשר הפונקציה נראית כמו הרכבה של שתי פונקציות ואפשר לפשט אותה משמעותית אם בוחרים $y = g(x)$ נכון ומציבים אותו בפונקציה. אינטגרציה בחלקים מתאימה יותר כאשר הפונקציה היא מכפלה של שתי פונקציות, אחת שקל לחשב את האינטגרל שלה ואחת שהנגזרת שלה לא מסובכת מדי. אבל, מדובר על המלצות כלליות בלבד והזיהוי באיזו שיטה להשתמש דורש מיומנות ותרגול. בפרק זה תמצאו תרגילים רבים בנושא אינטגרלים לא מסויימים שיעזרו לכם לפתח את המיומנות הדרושה ולהכיר מספר שיטות חישוב נוספות ו"טריקים" אלגבריים שיכולים לפשט את הפונקציה ולסייע בחישוב האינטגרל. ככל שתתרגלו יותר, תצליחו יותר.

דוגמא 5.4. חשבו את האינטגרל $\int \frac{1}{x}\ln(x)\mathrm{d}x$.

פתרון. חישבנו את האינטגרל בדוגמא 5.2 באמצעות שיטת ההצבה. נראה שאפשר לבצע חישוב זה גם באמצעות אינטגרציה בחלקים:

נגדיר $f(x) = 1/x, G(x) = \ln(x)$. מתקיים $F(x) = \int 1/x\mathrm{d}x = \ln(x)$ וכן $g(x) = 1/x$ לכן

$$\int 1/x \cdot \ln(x)\mathrm{d}x = \ln^2(x) - \int \ln(x)\cdot 1/x\mathrm{d}x$$

שימו לב שחזרנו באגף ימין לאינטגרל ממנו התחלנו, רק עם סימן מינוס. אם נסמן $I = \int \frac{1}{x}\ln(x)\mathrm{d}x$, נקבל את המשוואה $I = \ln^2(x) - I$ שפתרונה $I = \frac{1}{2}\ln^2(x)$, ולכן $\int \frac{1}{x}\ln(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln^2(x) + C$. ■

לפיכך, לפעמים אין שיטה אחת שהיא "מתאימה ביותר" ולעיתים שתי השיטות עובדות.

דוגמא 5.5. חשבו את האינטגרל $\int x\ln(x^2+1)\mathrm{d}x$.

פתרון. נשתמש באינטגרציה בחלקים כי כאשר נגזור את $\ln(x^2+1)$ נישאר רק עם פונקציה רציונלית. נסמן $G(x) = \ln(x^2+1)$ ולכן $g(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ וכן $f(x) = x$ כך ש-$F(x) = \frac{x^2}{2}$:

$$\int x\ln(x^2+1)\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\cdot\ln(x^2+1) - \int \frac{2x}{x^2+1}\cdot\frac{x^2}{2}\mathrm{d}x$$

נותר לחשב את האינטגרל $\int \frac{x^3}{x^2+1}\mathrm{d}x$. מאחר ו-$x^3 = x^2\cdot x$ כאשר $x = \frac{1}{2}(x^2)'$, נוח לנסות את החלפת המשתנים $y = x^2+1$. במקרה זה $\mathrm{d}y = 2x\mathrm{d}x$ ולכן

$$\int \frac{x^2\cdot 0.5\cdot 2x}{x^2+1}\mathrm{d}x = \int \frac{y-1}{2y}\mathrm{d}y = \int 0.5\mathrm{d}y - 0.5\int\frac{\mathrm{d}y}{y} = 0.5y - 0.5\ln(y)$$

האינטגרל האחרון הוא מיידי ושווה ל-$0.5(x^2+1) - 0.5\ln(x^2+1)$, לכן האינטגרל הכולל הינו

$$\int x\ln(x^2+1)\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\ln(x^2+1) - \frac{x^2+1}{2} + \frac{\ln(x^2+1)}{2} + C$$

■

תרגיל 5.4. פתרו את הדוגמא האחרונה באמצעות שיטת ההצבה.

המסקנה היא שלפעמים שיטה אחת לא מספיקה ולא תמיד אינטגרל ניפתר בצעד אחד. בדוגמא פישטנו את האינטגרל באמצעות אינטגרציה בחלקים ואז המשכנו את החישוב באמצעות שיטת ההצבה, אבל במקרים אחרים ייתכן שנצטרך להפעיל את אחת השיטות מספר פעמים עד שנגיע לפונקציה הקדומה. מצד שני, ישנם תרגילים שניתן לפתור בלי שימוש באף אחת מהשיטות, על ידי שימוש ב"טריקים" אלגבריים לפישוט הפונקציה. בדוגמא הבאה, משתמשים בתהליך ההפוך למכנה משותף כדי לפרק שבר אחד לסכום של שני שברים, וחישוב הקדומה של כל אחד מהם בנפרד:

דוגמא 5.6. חשבו את האינטגרל $\int \frac{4}{x^2+2x-3}\mathrm{d}x$.

פתרון. נשים לב שהפתרונות של $x^2+2x-3=0$ הם $x=1,-3$ ולכן מתקיים $x^2+2x-3=(x-1)(x+3)$. ננסה אם כך לפרק את השבר שנתון בשאלה לשני שברים, אחד עם המכנה $x-1$ ואחד עם המכנה $x+3$:

$$\frac{4}{x^2+2x-3}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}$$

כאשר $A,B\in\mathbb{R}$ הם קבועים שיש למצוא. על מנת למצוא אותם, נחשב את המכנה המשותף של אגף ימין ונקבל

$$\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}=\frac{A(x+3)+B(x-1)}{x^2+2x-3}=\frac{(A+B)x+3A-B}{x^2+2x-3}$$

כדי שאגף ימין יהיה שווה לביטוי ממנו התחלנו, המונה חייב להיות שווה ל-4, ולכן נדרוש שיתקיים בו זמנית $A+B=0$ (כי אין xים במונה) וכן $3A-B=4$ נציב $A=-B$ מהמשוואה הראשונה במשוואה השניה ונקבל $A=1$ ולכן $B=-1$.

נשתמש בפירוק זה בכדי לחשב את האינטגרל:

$$\int\frac{4}{x^2+2x-3}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+3}\mathrm{d}x=\ln(x-1)-\ln(x+3)+C$$

■

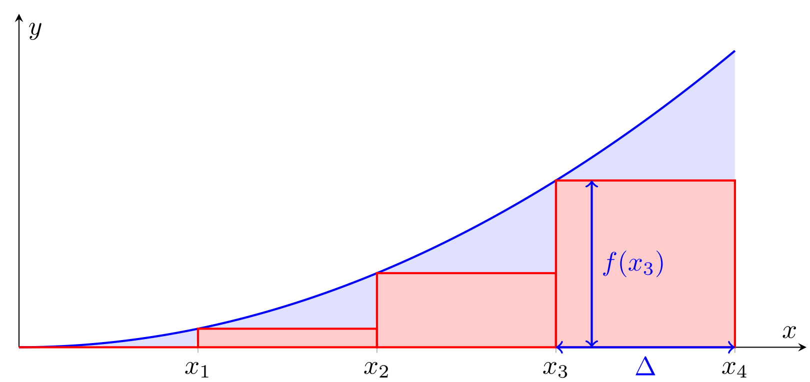
תרגיל 5.5. חשבו את האינטגרלים הבאים:

1. $\int 2x^5+\frac{3}{\sqrt{x}}-\frac{2}{x^3}\mathrm{d}x$.
2. $\int \frac{x}{x-1}\mathrm{d}x$.
3. $\int \frac{1}{\exp(\sqrt{x}/2)}\mathrm{d}x$.
4. $\int x\sqrt{x+2}\mathrm{d}x$.
5. $\int x^a\ln(x)\mathrm{d}x$ לכל $a\in\mathbb{R}$.
6. $\int(e^x+e^{-x})^2\mathrm{d}x$
7. $\int \frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.
8. $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$.
9. $\int \frac{1}{(4x-5)^7}\mathrm{d}x$.
10. $\int \frac{x+1}{9x^2-9x+2}\mathrm{d}x$.
11. $\int \frac{2^x+5^x}{10^x}\mathrm{d}x$.

5.2 האינטגרל המסויים

שאלה נוספת ולכאורה לא קשורה היא מה השטח שכלוא בין ציר ה-x לבין פונקציה כלשהי $f(x)$ בקטע $[a,b]$. שטח זה מכונה **האינטגרל המסויים** של הפונקציה ומסומן על ידי $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

ניתן לענות על השאלה הזו על ידי חלוקת הקטע $[a,b]$ להרבה קטעים קטנים וקירוב הפונקציה $f(x)$ בקטע על ידי קו ישר: נסמן $x_0 = a$ ונבחר Δ קטן מאוד. בקירוב טוב, בקטע $[a, a+\Delta]$, הפונקציה $f(x) \simeq f(x_0)$ ולכן השטח מתחת לפונקציה הוא $f(x_0)\Delta$, שכן זהו שטח של מלבן שרוחבו Δ וגבוהו $f(x_0)$ (ראו איור 5.1). באותה צורה, נסמן $x_1 = x_0 + \Delta$ ובקטע $[x_1, x_1+\Delta]$ נקרב את הפונקציה על ידי קו ישר שערכו $f(x_1)$. אם נמשיך את התהליך ונחלק את הקטע ל-n חלקים ($x_{n+1} = b$) נקבל שהשטח הכלוא מתחת לגרף הוא בקירוב $\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\Delta$, וכאשר $\Delta \to 0$ (כלומר מספר החלקים שואף לאינסוף) נקבל בדיוק את האינטגרל המסויים: $\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\Delta \xrightarrow[\Delta\to 0]{} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.



איור 5.1: חישוב שטחי ריבועים מהצורה $f(x_i)\Delta$ מאפשר לחשב את השטח הכלוא מתחת לפונקציה, האינטגרל המסויים שלה, כאשר גודל הצעד Δ שואף ל-0 (השטח הכחול, המתאר את ההפרש בין החישוב המדויק לקירוב באמצעות מלבנים, ישאף ל-0 ככל ש-Δ ילך ויקטן).

לדוגמא, נניח ש-x הוא הזמן ו-$f(x)$ היא צריכת החשמל של מכונה מסויימת במפעל בזמן מסויים x. בקירוב טוב, בפרק זמן קצר $[x_0, x_0+\Delta x]$ צריכת האנרגיה קבועה והאנרגיה הכוללת שהמכונה צרכה היא $f(x_0)\Delta x$. סכימת כל הביטויים מהצורה הזו כפי שתואר לעיל יתן את סך האנרגיה שהמכונה צרכה בפרק זמן $[a,b]$ ומכאן ניתן יהיה להסיק את עלות הפעלת המכונה או התפוקה שלה במהלך פרק הזמן הרלוונטי.

למרות השם והסימונים הדומים (שניתנו בדיעבד), העובדה שיש קשר בין אינטגרל מסויים (מציאת השטח מתחת לגרף) לבין אינטגרל לא מסויים (מציאת פונקציה קדומה לפונקציה נתונה) אינה טריויאלית. הקשר בין שתי פעולות אלו מנוסח במשפט הבא:

משפט 5.4 (המשפט היסודי של החדווא"א). תהי $F(x)$ פונקציה קדומה ל-$f(x)$ בקטע $[a,b]$. אזי

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

כלומר, ההפרש בין ערכי הפונקציה הקדומה של $f(x)$ הוא השטח הכלוא מתחת לפונקציה $f(x)$.

הערה 5.1. סימון מקובל להפרש ערכי פונקציה קדומה בין שני ערכים כאשר מחשבים האת

האינטגרל הוא $F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$. למשל:

$$\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}$$

המשפט היסודי של החדו"א עונה על השאלה איתה פתחנו את הפרק הקודם אך עדיין לא ענינו עליה: נניח שאנחנו יודעים את המחיר של מוצר מסויים לפני שנה וכמה המחיר השתנה בכל חודש, כיצד נמצא את המחיר כיום? נניח אם כך ש-$F(x)$ היא פונקציה המתארת את המחיר של מוצר מסויים בכל זמן x ונסמן ב-$f(x) = F'(x)$ את הפונקציה המתארת את השינוי במחיר של המוצר. נתבונן בנקודה מסויימת x_0. כפי שראינו בפרק 4, המשיק לפונקציה $F(x)$ בנקודה x_0 מהווה קירוב טוב לערך הפונקציה בסביבת הנקודה, לכן בקירוב טוב סביב x_0 נקבל $F(x) \simeq y(x) = f(x_0)(x - x_0) + F(x_0)$. המחיר של המוצר בזמן $x_1 = x_0 + \Delta$ (כאשר Δ הוא גודל מאוד קטן) יהיה אם כך בקירוב $F(x_1) \simeq f(x_0)\Delta + F(x_0)$. באותה צורה, אם נחשב את הנגזרת בנקודה x_1 ונעריך את מחיר המוצר בנקודה $x_2 = x_1 + \Delta$, נקבל $F(x_2) \simeq f(x_1)\Delta + F(x_1)$ ולכן $F(x_2) = f(x_0)\Delta + f(x_1)\Delta + F(x_0)$. באותה צורה, אם נמשיך ונעשה n צעדים קטנים בגודל Δ, נקבל שהערך של הפונקציה בנקודה האחרונה x_n הוא $F(x_{n+1}) \simeq \sum_{i=0}^n f(x_i)\Delta + F(x_0)$. כלומר, השינוי הכולל בערך הפונקציה $F(x_{n+1}) - F(x_0)$ הוא סכום של הרבה שינויים קטנים שמחושבים על ידי הנגזרת $f(x_i)$ כפול גודל הצעד. ככל שגודל הצעד ילך וישאף ל-0, כך ההבדל בין המשיק לבין הפונקציה עצמה יהיה יותר זניח, החישוב יותר מדוייק ונקבל את הערך האמיתי. בגבול שבו $\Delta \to 0$ נקבל את הערך האמיתי, וכפי שניתן לראות, מדובר בחישוב האינטגרל המסויים של $f(x)$.

הערה 5.2. סימון האינטגרל לקוח מתוך הביטוי $\sum_{i=0}^n f(x_i)\Delta$. הסימון $\int$ הוא לא אחר מאשר האות S (לציון סכימה) מוארכת ואילו $\mathrm{d}x$, המכונה הדיפרנציאל של x, מגיע מתוך הצעד הקטן שנעשה בכל פעם בתהליך החישוב, Δ.

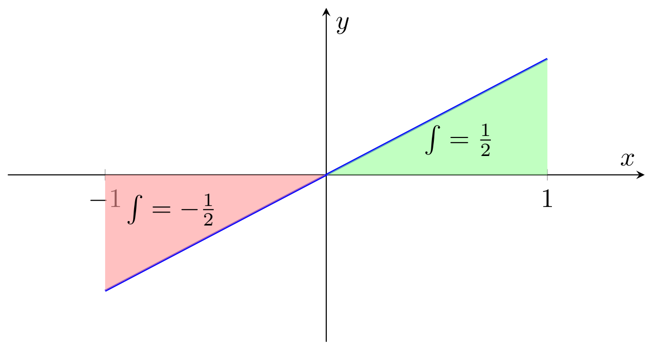
כעת ניתן להבין בדרך אחרת מדוע בשיטת ההצבה מחליפים את $\mathrm{d}y$ ב-$g'(x)\mathrm{d}x$: אם $y = g(x)$ אז צעד בגודל $\mathrm{d}x$ של המשתנה x יהפוך לצעד בגודל $g'(x)\mathrm{d}x$ של המשתנה y. למשל אם $y = x^2$ אז צעד בגודל $\mathrm{d}x = 1$ מ-$x = 0$ ל-$x = 1$ מתאר שינוי בגודל 1 של y, אבל מ-$x = 1$ ל-$x = 2$ הוא צעד בגודל $2^2 - 1^2$ של המשתנה y.

השטח המחושב באמצעות אינטגרל מסויים הוא שטח עם סימן, כאשר סימן חיובי משמעו שהשטח מעל ציר ה-x (כלומר $f(x) > 0$) ושטח שלילי משמעו שהשטח מתחת לציר ה-x (כלומר $f(x) < 0$). למשל $\int_0^1 x\mathrm{d}x = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2} > 0$ כי בתחום $[0,1]$ הפונקציה $f(x) = x$ מעל ציר ה-x. מצד שני, $\int_{-1}^0 x\mathrm{d}x = \left.\frac{x^2}{2}\right|_{-1}^0 = -\frac{1}{2} < 0$ כי בתחום $[-1,0]$ הפונקציה $f(x) = x$ מתחת לציר האיקס. השטח (הגאומטרי) הכלוא בין הפונקציה לציר הוא זהה בשני המקרים אבל הסימן הפוך כי הוא ממוקם במקום אחר ביחס לציר האיקס (ראו איור 5.2). שטח זה יכול להיות גם אפס, למשל $\int_{-1}^1 x\mathrm{d}x = 0$ כי השטח החיובי הכולל שווה לשטח השלילי הכולל והם מבטלים זה את זה.

אם אנחנו רוצים לחשב את השטח הגאומטרי הכלוא בין הפונקציה לבין ציר ה-x ולא משנה הסימן, נחשב את האינטגרל של $|f(x)|$ במקום של $f(x)$ ובכך נבטיח שכל השטח יהיה חיובי ויהיה שווה לשטח הגאומטרי הרגיל.

דוגמא 5.7. חשבו את $\int_1^4 e^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

פתרון. ראשית נחשב את האינטגרל הלא מסויים $\int e^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ באמצעות שיטת ההצבה. נסמן



איור 5.2: השטח הכלוא בין הפונקציה $f(x) = x$ לבין ציר ה-x. בתחום $x > 0$ הפונקציה מעל הציר והשטח חיובי ובתחום $x < 0$ הפונקציה מתחת לציר והשטח שלילי.

ואז $y = \sqrt{x}$ ואז $\mathrm{d}y = \frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$. לכן, $\mathrm{d}x = 2\sqrt{x}\mathrm{d}y = 2y\mathrm{d}y$ והאינטגרל המתקבל יהיה

$$\int e^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int e^{y}2y\mathrm{d}y = 2e^{y}(y-1) = 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)$$

כאשר האינטגרל לאחר ההצבה חושב בעזרת אינטגרציה בחלקים (דוגמא 5.1). לפיכך $\int_1^4 e^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)\Big|_1^4 = 2e^2(2-1) - 2e^1(1-1) = 2e^2$ ■

כאשר מחשבים אינטגרל מסויים, אסטרטגיה טובה היא לנסות קודם לחשב את הפונקציה הקדומה באמצעות האינטגרל הלא מסויים ולאחר מכן להציב את ערכי הקצה של הקטע, כפי שעשינו בדוגמא האחרונה. כל כללי האינטגרציה שראינו עד כה בהקשר הלא מסויים תקפים גם כאן, ובנוסף מתקיימות הזהויות הבאות:

1. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ כאשר $a < c < b$.

   הסיבה היא שניתן לפרק את השטח הכלוא מתחת לפונקציה בקטע $[a,b]$ לשני שטחים, אחד בקטע $[a,c]$ ואחד בקטע $[c,b]$. כך למשל, השטח מתחת לפונקציה $f(x) = x$ בקטע $[-1,1]$ המוצג באיור 5.2 ניתן לחישוב על ידי חישוב השטח האדום (קרי, האינטגרל בקטע $[-1,0]$) וחישוב השטח הירוק (האינטגרל בקטע $[0,1]$).

2. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$.

   כלומר, הכיווניות של השטח מתבטאת לא רק בהאם הוא מעל או מתחת לציר ה-x אלא גם בכיוון החישוב: השטח כאשר סוכמים אותו מימין לשמאל הוא בסימן הפוך מאשר כאשר סוכמים אותו משמאל לימין. אפשר להראות זהות זו מפורשות באמצעות חישוב שני האינטגרלים עם המשפט היסודי של החדוו"א.

3. השטח הכלוא בין הפונקציה $f(x)$ ל-$g(x)$ הוא $\int_a^b f(x) - g(x)\mathrm{d}x$.

   כאן אנחנו מחסרים מהשטח הכלוא בין הפונקציה $f(x)$ לציר ה-x, הנתון על ידי $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, את השטח הכלוא בין $g(x)$ לציר ה-x, הנתון על ידי $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$, ומקבלים את השטח הכלוא בין שתי הפונקציות. כאמור, שטח זה יכול להיות גם שלילי או אפס.

ישנם מקרים בהם ניתן לעשות את החישוב של האינטגרל הלא מסויים גם כאשר הפונקציה לא ידועה או כאשר מסובכת ואין לה פונקציה קדומה. תרגיל 5.8 מציג דוגמא אחת כזו, אך לרוב חישובים כאלו דורשים שיטות יותר מתקדמות, למשל כאלו המתבססות על מספרים מרוכבים ואינם כלולים בקורס זה.

תרגיל 5.6. חשבו את האינטגרלים המסויימים הבאים:

1. $\int_{-1}^{3} x^2 \mathrm{d}x$.
2. $\int_{-1}^{2} x^2 + 3x\mathrm{d}x$.
3. $\int_{0}^{3} |x^2 + x - 2|\mathrm{d}x$.
4. $\int_{-0.5}^{0.5} \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \mathrm{d}x$.
5. $\int_{0}^{\ln(2)} e^{3x-1}\mathrm{d}x$.
6. $\int_{1}^{4} \frac{x}{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x$.

תרגיל 5.7. חשבו את האינטגרלים המסויימים הבאים:

1. $\int_{-1}^{3} |x|\mathrm{d}x$.
2. $\int_{-1}^{4} f(x)\mathrm{d}x$ עבור $f(x) = \begin{cases} -1, & 0 \le x \le 1 \\ 2x-3, & 1 < x < 2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$.
3. $\int_{-3}^{5} f(x)\mathrm{d}x$ עבור $f(x) = \begin{cases} 4x^2, & 1 \le x \le 2 \\ 3x, & 2 < x < 3 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$.
4. $\int_{-3}^{5} xf(x)\mathrm{d}x$ עבור $f(x)$ מהסעיף הקודם.

תרגיל 5.8. תהי $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה המקיימת לכל x: $f(x) = -f(-x)$ (פונקציה כזו נקראית **אי זוגית**). הוכיחו כי לכל $a > 0$ מתקיים $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$.

תרגיל 5.9. חשבו את השטח הכלוא בין הפרבולות $f(x) = -x^2 - x + 6$ ו-$g(x) = x^2 + 3x$ בקטע המוגדר על ידי נקודות החיתוך שלהן.

החישובים עד כה בוצעו לפונקציות רציפות. כל החישובים תקפים גם עבור פונקציות עם נקודות אי-רציפות סליקות, שכן שינוי ערך הפונקציה בנקודה אחת לא משנה את האינטגרל. אם נחשב את האינטגרל המסויים של $g(x) = \begin{cases} 1, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ במקום הפונקציה הקבועה $f(x) = 1$, באיזשהו תחום, ההבדל בין השטחים יהיה רק השטח של המלבן הקטן שכולל את הנקודה $x = 0$. אבל מאחר וצלע הבסיס שלו שואפת לאפס, הבדל השטחים שואף לאפס והנקודה הבודדת לא תשפיע: $\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \int_{a}^{b} g(x)\mathrm{d}x$.

5.2.1 אינטגרלים לא אמיתיים

ניתן לחשב את השטח מתחת לפונקציה $f(x)$ גם כאשר היא מוגדרת לא על קטע סגור אלא על קרן או אפילו הישר $\mathbb{R}$ כולו. שטח זה יכול להיות סופי (אפילו שהקטע הוא אינסופי) כאשר התוספות שמוסיפים בכל צעד הן קטנות מספיק, כלומר כאשר השטח הנוסף שמתווסף

כאשר מגדילים את x לאינסוף, שואף ל-0 מספיק חזק. מבחינה פורמלית, נגדיר אינטגרל לא אמיתי באופן הבא:

$$\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} F(b) - F(a)$$

כאשר $F(x)$ היא הפונקציה הקדומה של $f(x)$. ההגדרה עבור $\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x$ דומה. עבור האינטגרל על כל הישר, $\int_{-\infty}^\infty f(x)\mathrm{d}x$, נשים לב כי מדובר על שני גבולות שצריך לחשב בנפרד (לא חשוב באיזה סדר):

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} F(b) - \lim_{a\to-\infty} F(a) \tag{5.1}$$

דוגמא 5.8. חשבו את האינטגרל המסויים $\int_0^\infty e^{-x}\mathrm{d}x$.

פתרון. הפונקציה הקדומה של $f(x)=e^{-x}$ היא $F(x)=-e^{-x}$ ולכן

$$\int_0^\infty e^{-x}\mathrm{d}x = -e^{-x}\Big|_0^\infty = \lim_{b\to\infty} -e^{-b} - (-e^{-0}) = 0+1=1$$

■

כאשר הגבול לא קיים (אינסופי) נאמר שהאינטגרל מתבדר והמשמעות היא שהשטח הכלוא מתחת לפונקציה הוא אינסופי. למשל $\int_0^\infty x\mathrm{d}x=\infty$ כי ככל שמגדילים את גבול האינטגרציה הימני (ראו איור 5.2) כך השטח של המשולש הירוק הולך וגדל לאינסוף.

תרגיל 5.10. יהי $\lambda>0$ קבוע. חשבו את האינטגרלים המסויימים

1. $\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x}\mathrm{d}x$.
2. $\int_0^\infty \lambda x e^{-\lambda x}\mathrm{d}x$.
3. $\int_0^\infty \lambda x^2 e^{-\lambda x}\mathrm{d}x$.

5.3 שימושים לאינטגרלים בכלכלה

בכלכלה ישנם הרבה מושגים ושימושים המבוססים על אינטגרלים. אחת הסיבות היא שאינטגרל מסוים הוא תהליך ההופך פונקציה למספר בודד המייצג את התופעה שהפונקציה מתארת. נתאר כאן מספר שימושים כאלו באופן שטחי, מבלי לגנוב את הבכורה מהקורסים המתאימים.

5.3.1 ממוצע משוקלל, תוחלת ושונות

נניח ש-$f(x)$ זו התפלגות שכר, כלומר לכל שכר $x\geq 0$, הערך של $f(x)$ הוא "אחוז" האנשים באוכלוסיה שמרוויחים שכר זה. למשל, אם יש רק שתי רמות שכר, $x=1$ ו-$x=2$, אז $f(1)=f(2)=1/2$ ו-$f(x)=0$ לכל x אחר. השכר הממוצע הוא מספר הוא $1\cdot f(1)+2\cdot f(2)=1.5$, שזה הממוצע המשוקלל של השכר x כשהמשקולות הן ה-$f(x)$ים. במקרה הכללי, אנחנו נסכום את כל ה-xים האפשריים כפול ה-$f(x)$ים המתאימים, כלומר נעשה אינטגרל ונקבל שהשכר הממוצע הוא $\int_0^\infty xf(x)\mathrm{d}x$.

בקורס בהסתברות חישוב דומה מאפשר לחשב את הערך הממוצע של משתנה מקרי רציף, המכונה **התוחלת** של המשתנה המקרי, כאשר $f(x)$ היא פונקציית צפיפות ההסתברות:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) \mathrm{d}x$$

השונות של המשתנה המקרי מוגדרת על ידי

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) \mathrm{d}x - (\mathbb{E}(X))^2$$

והיא מתארת את הפיזור של המשתנה המקרי סביב התוחלת: ככל שהשונות קטנה יותר, הערכים של המשתנה המקרי קרובים יותר לתוחלת וככל שהיא גדולה יותר הערכים בסיכוי גבוה יותר רחוקים מהתוחלת.

תרגיל 5.11. חשבו את התוחלת והשונות של המשתנים המקריים עם פונקציות הצפיפות הבאות:

1. משתנה מקרי אחיד בקטע $[a,b]$ שצפיפותו $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$.
2. משתנה מקרי מעריכי עם פרמטר $\lambda > 0$ שצפיפותו $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$.
3. משתנה מקרי נורמלי סטנדרטי עם פונקציית צפיפות $f(x) = \frac{1}{2\pi} e^{-x^2/2}$ (חשבו רק את התוחלת).

5.3.2 מדד ג'יני לאי-שוויון

מדד ג'יני מודד את אי-השוויון בהכנסות של האוכלוסיה, כלומר עד כמה העשירים מרוויחים יותר מאשר העניים. בכדי לעשות זאת, מתבוננים בפונקציה $L(x) : [0,1] \to [0,1]$ המכונה עקומת לורנץ ומוגדרת להיות

$$L(x) = \frac{\text{סך ההכנסות מאחוזון } x \text{ ומטה}}{\text{סך ההכנסות של כלל האוכלוסיה}}$$

הפונקציה $L(x) = x$ מתארת שיוויון מוחלט בהכנסות, כי ההכנסה של כל אחוזון היא בדיוק האחוז המתאים (10% התחתונים מקבלים 10% מההכנסות וכד'). הפונקציה $L(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ מתארת אי-שיוויון מוחלט בהכנסות, שכן כל האחוזונים התחתונים לא מרוויחים כלום ורק האחוזון הכי עליון, האדם הכי עשיר, מקבל את כל ההכנסות.

מדד ג'יני לאי-שיוויון מודד את המרחק בין הפונקציה $L(x)$ לבין הפונקציה x המתארת שיוויון מלא ומוגדר על ידי

$$GI = 2 \int_0^1 x - L(x) \mathrm{d}x$$

עבור שיוויון מוחלט, מדד ג'יני הוא כמובן $GI = 0$ ועבור אי-שוויון מוחלט הוא $GI = 2 \int_0^1 x \mathrm{d}x = 1$. כך, ככל שמדד ג'יני קרוב יותר ל-0 נקבל חלוקה שיוויונית יותר וככל שהוא קרוב יותר ל-1 נקבל חלוקה אי-שוויונית יותר. התפקיד של המקדם 2 בהגדרה של מקדם ג'יני הוא נרמול: בלעדיו ערכי המדד היו בין 0 ל-0.5, אך יותר נוח למדוד דברים על סקלה שבין 0 ל-1 ולכן כופלים את התוצאה של האינטגרל ב-2.

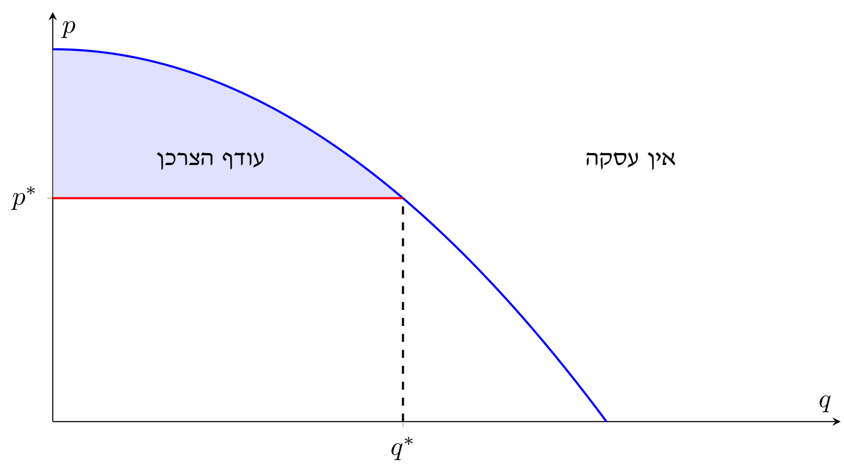
תרגיל 5.12. חשבו את מדד ג'יני לאי-שוויון של עקומת הלורנץ $L(x) = x^2$.

5.3.3 עודף הצרכן

עודף הצרכן הוא מדד לרווחת הצרכן, המתאר את ההפרש בין מה שהוא היה מוכן לשלם עבור מוצר כלשהו לבין הסכום שהוא בפועל משלם. במקרה הפשוט, אם הצרכן היה מוכן לשלם על מוצר כלשהו 10 ש"ח אבל קנה אותו ב-7 ש"ח, העודף לצרכן הוא 3 ש"ח. באמצעות אינטגרל נחשב את העודף לצרכן במקרה הכללי יותר.

נתבונן בעקומת הביקוש $D(x)$ המתארת את המחיר המרבי שהצרכן מוכן לשלם עבור כמות x של המוצר, נסמן ב-p^* את מחיר השוק וב-q^* את הכמות המתאימה כך שיתקיים $p^* = D(q^*)$. לכל $x < q^*$, הצרכן קונה את המוצר במחיר יותר נמוך ממה שהוא היה מוכן לשלם ולכן הוא מרוויח מכך. לכל $x > q^*$, מחיר השוק גבוה מדי ואין עסקה (ראו איור 5.3) לכן **העודף של הצרכן** הוא

$$\int_0^{q^*} D(x) - p^* \mathrm{d}x = \int_0^{q^*} D(x)\mathrm{d}x - p^* q^*$$



איור 5.3: חישוב עודף הצרכן, ההפרש בין המחיר שהצרכן מוכן לשלם תמורת המוצר לבין המחיר שבו המוצר נמכר בפועל.

דוגמא 5.9. חשבו את עודף הצרכן עבור פונקציית הביקוש $D(x) = \frac{6-2x}{1+x}$ וההיצע $S(x) = \frac{x+3}{2}$.

פתרון. בשיווי משקל הביקוש שווה להיצע, כלומר $S(x) = D(x)$. הפתרון של המשוואה $D(x) = S(x)$ שהוא $x = 1$. לכן מחיר שיווי המשקל הינו $D(1) = 2$ והעודף של הצרכן הינו

$$\int_0^1 D(x)\mathrm{d}x - 2 \cdot 1 = \int_0^1 \frac{8 - 2(x+1)}{1+x}\mathrm{d}x - 2 = 8\ln(1+x)\big|_0^1 - 4 = 8\ln 2 - 4$$

■

5.4 תרגילים מסכמים

תרגיל 5.13. חשבו את האינטגרלים הלא מסוימים הבאים:

1. $\int(3x+2)^{10}\mathrm{d}x$.
2. $\int\frac{x^2+4x}{x+2}\mathrm{d}x$.
3. $\int\sqrt[3]{4-5x}\mathrm{d}x$.
4. $\int\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}\mathrm{d}x$.
5. $\int\frac{3x+2}{x+3}\mathrm{d}x$.
6. $\int\frac{2x-7}{x^2-5x+6}\mathrm{d}x$.

תרגיל 5.14. חשבו את האינטגרלים המסוימים הבאים:

1. $\int_{-1}^{1}(3x+1)^2\mathrm{d}x$.
2. $\int_{1}^{4}\frac{1+\sqrt{x}}{x^2}\mathrm{d}x$.
3. $\int_{4}^{9}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}\mathrm{d}x$.
4. $\int_{-1}^{1}\frac{1}{2x+3}\mathrm{d}x$.
5. $\int_{0.5}^{1}\frac{1}{x(x+1)}\mathrm{d}x$.
6. $\int_{0}^{4}\frac{x}{1+\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x$.
7. $\int_{-5}^{5}(x^7-3x^3+6x)^{11}\mathrm{d}x$.
8. $\int_{-1}^{3}|2x-2|\mathrm{d}x$.
9. $\int_{-1}^{1}\frac{x(|x|+1)^7}{x^4+x^2+1}\mathrm{d}x$.
10. $\int_{-2}^{2}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\mathrm{d}x$.

6 פונקציות מרובות משתנים

לעיתים נדירות יש רק משתנה אחד (x) שמשפיע על האחר ($y=f(x)$) ולרוב ישנם מספר משתנים המשפיעים בו זמנית. כדי לנתח את ההשפעה שלהם, עלינו להרחיב את מושג הפונקציה לפונקציות מרובות משתנים, המקבלות כקלט מספר של משתנים. למשל, הציון במבחן היא פונקציה של 4 משתנים (ציוני כל אחת מהשאלות) והרווח של חברה בשוק דואופוליסטי פשוט היא פונקציה של שני משתנים (המחיר שקובעת כל חברה). בפרק זה נרחיב את המושגים שבהם עסקנו עד כה לפונקציות של מספר משתנים, תוך התמקדות בגזירה ואופטימיזציה, דהיינו מציאת נקודות קיצון של הפונקציה ("איזה מחיר צריך לקבוע כדי למקסם את הרווח של החברה?").

6.1 הגדרות

פונקציות, כזכור, מורכבות מתחום, טווח וכלל התאמה (הנוסחא). במשתנה יחיד, התחום והטווח היו לרוב $\mathbb{R}$, אך כאשר ישנם משתנים רבים, התחום של כל אחד מהם הוא $\mathbb{R}$. התחום של הפונקציה אם כך תהיה קבוצת ה-n-יות הסדורות עבור $n\in\mathbb{N}$ כלשהו:

$$\mathbb{R}^n=\{(x_1,\ldots,x_n)|x_i\in\mathbb{R}\}$$

למשל $\mathbb{R}^2$ היא קבוצת כל הזוגות הסדורים מהצורה (x_1,x_2), כלומר כל הזוגות של שני מספרים ממשיים. $\mathbb{R}^5$ היא קבוצת כל החמישיות הסדורות מהצורה (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) וכן הלאה. באופן טבעי, $\mathbb{R}^1=\mathbb{R}$, כלומר המקרה $n=1$ הוא המקרה בו כבר עסקנו.

המשמעות של המילה **סדור**, בהקשר זה, היא שהסדר בו רשומים המשתנים בn-יה משנה: $(2,1)\neq(1,2)$. אמנם מדובר על אותם ערכים, אבל הרווח של חברה מסויימת אם המחיר שהיא קובעת הוא 1 והמחיר שהחברה השניה קובעת הוא 2 לא יהיה זהה למצב ההפוך, בו המחיר של החברה הראשונה הוא 2 ושל החברה השניה הוא 1.

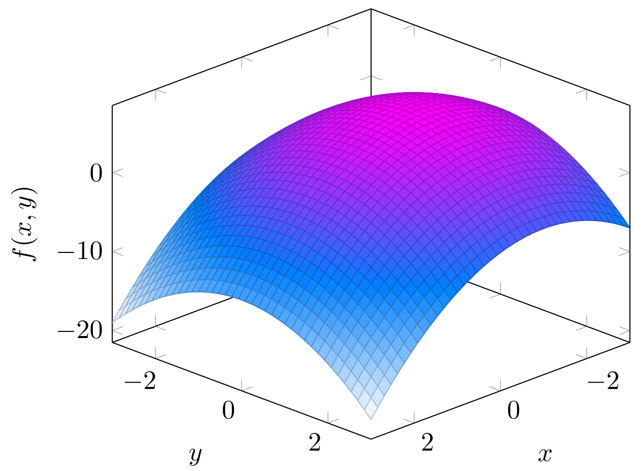
פונקציה ב-$n\in\mathbb{N}$ משתנים היא מקבלת כקלט n-יות סדורות ומוציאה כפלט מספרים ממשיים, כלומר $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. כלל ההתאמה של הפונקציה יהיה איזושהי נוסחא הכוללת את n המשתנים. למשל, $f(x_1,x_2)=x_1\cdot x_2^3$ היא פונקציה $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ הלוקחת את המספר הראשון וכופלת אותו בריבוע של המספר השני. הציון במבחן הוא $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1+x_2+x_3+x_4$ כאשר x_1,x_2,x_3,x_4 הם ארבעת ציוני השאלות המרכיבות את המבחן. בקורס זה נתמקד בעיקר במקרה $n=2$ (ומעט ב-$n=3$) כי הם יותר פשוטים, אך ניתן להרחיב בצורה מיידית את רוב הדיון גם למקרה הכללי. עבור $n=2$ לרוב נתייחס למשתנים בתור (x,y) במקום (x_1,x_2) ועבור $n=3$ נתייחס למשתנים בתור (x,y,z).

6.1.1 שרטוט פונקציות בשני משתנים

עד כה לא התקשנו לשרטט פונקציות של משתנה בודד: הצירים היו x ו-y והעקומה הייתה $y=f(x)$. בפונקציה של שני משתנים יש שלושה צירים x,y ו-$z=f(x,y)$ וכבר אין מספיק מקום על דף כדי לשרטט את הפונקציה כמו שצריך. כיצד אם כך נשרטט פונקציות בשני משתנים?

מתברר שלדמיין פונקציה בשני משתנים קל יותר כשלב ראשון, שכן זה העולם שבו אנחנו חיים. אם (x,y) מתארת נקודה על כדור הארץ (למשל, קו גובה וקו רוחב) אז הפונקציה המתארת את הגובה של הנקודה הזו מעל פני הים היא פונקציה בשני משתנים בתוכה אנחנו חיים כל העת. הגרף של הפונקציה אם כך הוא "פני שטח" שכוללים הרים ועמקים. כשאנחנו עולים על הר הערך של הפונקציה עולה (הנקודה יותר גבוהה) וכשאנחנו יורדים מההר הערך של הפונקציה יורד (הנקודה יותר נמוכה). לכן, נדמיין פונקציות בשני משתנים כמו פני שטח

של עולם בהם אנחנו יכולים להסתובב. באיור 6.1 מציג פני שטח לדוגמא של הפונקציה $f(x,y)=-x^2-y^2-2x+5$.



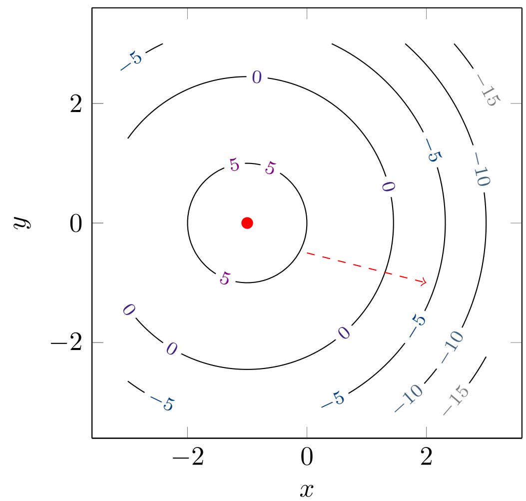
איור 6.1: שרטוט תלת מימדי של הפונקציה $f(x,y)=-x^2-y^2-2x+5$.

שרטוטים כמו איור 6.1 קלים לייצור על ידי מחשב, אבל מאוד קשים לציור ביד ולפיענוח, כי תמיד ציור על דף דו מימדי יתקשה להציג כמו שצריך צורה תלת מימדית, ויהיו כל מיני עיוותים הנובעים מהפרספקטיבה ותחושת העומק המזוייפת שהציור מנסה לייצר. דרך נוחה יותר לשרטט פונקציה של שני משתנים היא באמצעות שרטוט קווי הגובה, על ידי יצירת "מפה טופוגרפית" של פני השטח. במקום לשרטט את הפונקציה כמו באיור 6.1, נשרטט אותה ממבט על ונשרטט קווים המתארים מסלולים שבהם הערך של הפונקציה לא משתנה. בעולם האמיתי, לו היינו הולכים לאורך קווים כאלו, הגובה שבו אנחנו נמצאים לא היה משתנה ולא היינו עולים או יורדים.

באופן פורמלי, לכל $c\in\mathbb{R}$ אוסף כל הזוגות הסדורים (x,y) המקיימים את המשוואה $f(x,y)=c$ נקרא **קו הגובה ה-c** של הפונקציה f, ועקומה מהצורה הזו שנשרטט על מישור $x-y$ **נקראת עקומה שוות ערך של** f (קונטורים). באיור 6.2 משורטטת מפת קווי הגובה של הפונקציה $f(x,y)=-x^2-y^2-2x+5$ המוצגת באופן תלת מימדי באיור 6.1 עבור $c=-15,-10,-5,0,5$.[7] מהמפה מבינים שהפונקציה נראית (בתחום זה) כמו הר וכאשר נעים לכיוון הנקודה האדומה חוצים קווי גובה עם ערכים הולכים ועולים, כלומר $f(x,y)$ הולך ועולה עד שמגיעים לפסגת ההר. לעומת זאת, אם נעים לאורך החץ המקווקו, חוצים קווי גובה עם ערכים הולכים ויורדים, כלומר יורדים מ"ההר" וערכי $f(x,y)$ קטנים לאורך מסלול זה.

בכלכלה, עקומות שוות ערך מתארות את הקשר בין שני משתנים x ו-y בהן בהן ערך של גודל אחר ($f(x,y)$) נשמר. למשל, נניח שאפשר לקנות x ליטרים של מים בעלות של 1 ש"ח לליטר ו-y ליטרים של מיץ בעלות של 2 ש"ח לליטר. המחיר שנשלם יהיה $f(x,y)=x+2y$. העקומה שוות הגובה $f(x,y)=x+2y=5$ מתארת את כל הצירופים של מים ומיץ שאפשר לקנות ושעולים ביחד 5 ש"ח. כלומר כאן העקומה מתארת את האילוץ שלנו ("חייבים לבזבז בדיוק 5 ש"ח") ומתארת את כל האפשרויות לעשות זאת. אם נרצה לצרוך קצת פחות מיץ,

[7] קחו בחשבון שבגלל מגבלות של הציור חלק מהקווים לא שורטטו במלואם, אבל קל להבין את האופן בו הם אמורים להיראות.



איור 6.2: מפת קווי גובה של הפונקציה $f(x,y)=-x^2-y^2-2x+5$.

נצטרך לקנות יותר מים ולזוז לאורך קו הגובה כדי לשמור על האילוץ. באופן דומה, אם $g(x,y)$ היא פונקציה המתארת את ההנאה (התועלת) של הצרכן מרכישת x ליטרים של מים ו-y ליטרים של מיץ, אז עקומה שוות גובה מתארת כאן צירופים של מים ומיץ שטובים לצרכן באותה מידה, ונקראת עקומת האדישות: הצרכן אדיש בין כל שני צירופים של מים ומיץ שנמצאים על אותה העקומה כי מבחינתו ההנאה שלו מהם זהה (ערך הפונקציה g זהה).

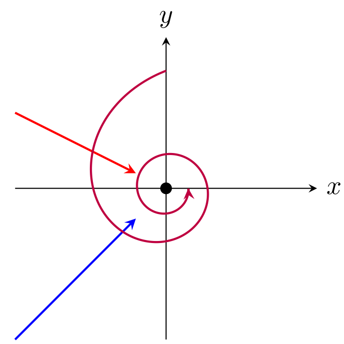
תרגיל 6.1. שרטטו עקומות שוות-ערך לפונקציות הבאות:

1. $f(x,y)=3x-y+3$.
2. $f(x,y)=x^3-y$.
3. $f(x,y)=(x-1)^2+(y+3)^2$.
4. $f(x,y)=e^{x-y}$.
5. $f(x,y)=2\ln(x)+\ln(y)$.

6.2 גבולות

הגבול של פונקציה $f(x)$ במשתנה בודד בנקודה x_0 הוא הערך שאליו הפונקציה מתקרבת כאשר x מתקרב ל-x_0. ראינו שייתכנו שני כיווני התקרבות ל-x_0: מימין $x\to x_0^+$ ומשמאל $x\to x_0^-$. כאשר מדובר על פונקציה במספר משתנים, ניתן להתקרב אל כל נקודה מאינסוף כיוונים שונים. כך למשל, לנקודה $(0,0)$ אפשר להתקרב מכל כיוון (בקווים ישרים) ואפילו במסלולים מוזרים, דוגמת הספירלה המשורטטת באיור 6.3. על מנת שלפונקציה $f(x,y)$ יהיה גבול בנקודה מסויימת (x_0,y_0), נדרוש שהערך של הפונקציה יתקרב למספר מסויים $L\in\mathbb{R}$ ללא תלות בכיוון ההתקרבות, בדומה לכך שבמשתנה יחיד קיים גבול רק אם הגבולות החד-צדדיים קיימים ושווים.

מרגע שקבענו את כיוון ההתקרבות, כלומר קבענו מה הקשר בין x ל-y במסלול שבו מתקרבים לנקודה, הגבול הופך להיות לגבול במשתנה יחיד וניתן לחשב אותו כרגיל. לדוגמא, נתבונן בפונקציה $f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$ ונבדוק האם קיים לה גבול בנקודה $(0,0)$. ראשית, נבדוק מסלולים מהצורה $y=ax$, כלומר קווים ישרים העוברים דרך ראשית הצירים לאורכם



איור 6.3: כיווני התקרבות אפשריים לנקודה $(0,0)$ במישור $x-y$.

נתקרב לנקודה $(0,0)$, כאשר $a \in \mathbb{R}$ קבוע (אלו בעצם קווים דוגמת הקו האדום והכחול המופיעים באיור 6.3). כאשר $y = ax$, הגבול $(x,y) \to (0,0)$ בעצם מתקבל כאשר $x \to 0$ שכן אז בהכרח גם $y \to 0$. נציב את הקשר $y = ax$ בפונקציה ונקבל:

$$f(x, ax) = \frac{x \cdot ax}{x^2 + (ax)^2} = \frac{ax^2}{x^2(1+a^2)} = \frac{a}{1+a^2}$$

כלומר לאורך כל ישר הערך של הפונקציה קבוע (לא תלוי כבר ב-x, y) ושווה גם לגבול ב-$x \to 0$. למשל, אם מתקרבים לאורך ציר ה-x, כלומר כאשר $a = 0$, נקבל $f(x,0) = 0$. לעומת זאת, אם נתקרב לאורך הישר $y = x$ (כלומר $a = 1$) נקבל $f(x,x) = 1/2$. מאחר והגבול בכל כיוון התקרבות הוא שונה, הרי שלפונקציה אין גבול בנקודה $(0,0)$.

פונקציה כזו נראית כמו בניין 72. כאשר מתקרבים לבניין מכיוון תחנת הרכבת, מגיעים לקומה השלישית. לעומת זאת, כאשר מתקרבים לבניין מכיוון ארומה, מגיעים לקומת הקרקע. הקומה, קרי ערך הפונקציה, תלוי בכיוון ממנו מגיעים אל הבניין ולכן לא קיים גבול לפונקציה בנקודה.

לעומת זאת לפונקציה כן קיים גבול בנקודה $(2,0)$. כאשר מתקרבים לנקודה $(2,0)$, ולא חשוב מאיזה כיוון, הערכים של y שואפים ל-0 ולכן המונה שואף ל-0 בעוד שהמכנה שואף ל-2^2. לכן הפונקציה כולה שואפת ל-0 ונרשום $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = 0$. טיעון כזה לא היה יכול לעבוד סביב הנקודה $(0,0)$ כי שם גם המונה וגם המכנה שואפים ל-0 ומקבלים גבול מהצורה $\frac{0}{0}$ שיוצר את המצב הבעייתי בעטיו אין גבול לפונקציה.

6.3 נגזרות

6.3.1 נגזרות חלקיות

מושג הנגזרת ניתן להרחבה גם לפונקציות עם מספר משתנים. הנגזרת $f'(x_0)$ מדדה את קצב השינוי הרגעי של הפונקציה $f(x)$ בנקודה x_0 כאשר x משתנה בקצת. באותה צורה, אפשר לשאול מהו קצב השינוי הרגעי של פונקציה במספר משתנים כאשר משתנה מסויים משתנה בקצת. בכך, אנחנו שומרים על כל שאר המשתנים קבועים ובודקים רק את התלות בין הפונקציה לבין המשתנה המעניין אותנו.

הגדרה 6.1. תהי $f(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. הנגזרת החלקית (מסדר ראשון) של f לפי x מוגדרת

על ידי הגבול (אם הוא קיים):

$$f'_x(x_0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$$

והנגזרת החלקית לפי y מוגדרת באופן דומה:

$$f'_y(x_0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h}$$

לעיתים משמיטים את סימן הגזירה ורושמים פשוט $f_x(x,y)$ או $f_y(x,y)$. סימון מקובל נוסף הינו $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ לציון הנגזרת החלקית לפי x ול-$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ לציון הנגזרת לפי y.

הגדרת הנגזרת באמצעות הגבול כאן היא לתצוגה בלבד. משמעותה, בפועל, היא שכאשר מחשבים את הנגזרת החלקית של f לפי x, מתייחסים ל-y כאל קבוע. בפרט, $\frac{\partial y}{\partial x}=0$ ולמעשה הגזירה מתבצעת לפי כל כללי הגזירה של פונקציות של משתנה יחיד. לדוגמא, עבור $f(x,y)=\frac{x^2-y}{x+y^2}$ נקבל

$$f'_x(x,y)=\frac{2x(x+y^2)-1(x^2-y)}{(x+y^2)^2}=\frac{x^2+2xy^2+y}{(x+y^2)^2}$$

ובאופן דומה

$$f'_x(x,y)=\frac{-1(x+y^2)-2y(x^2-y)}{(x+y^2)^2}=\frac{-x+y^2-2yx^2}{(x+y^2)^2}$$

תרגיל 6.2. חשבו את הנגזרות החלקיות לפי כל אחד מהמשתנים של הפונקציות:

א. $f(x,y,z)=\frac{x^2}{y}-\ln(y+2z)$.

ב. $f(x,y,z)=x+\frac{x-y}{y-z}$.

ג. $f(x,y)=x\ln(y)-y\ln(x)$.

לנגזרת חלקית יש אותה משמעות כמו לנגזרת רגילה. למשל, נגזרת חלקית חיובית משמעה שהפונקציה עולה כאשר מגדילים את המשתנה ונגזרת חלקית שלילית משמעה שהפונקציה יורדת כאשר מגדילים את המשתנה. בנוסף, מאחר ולפונקציה בשני משתנים יש בכל נקודה שתי נגזרות חלקיות, ניתן לקבל משמעויות נוספות בהתאם לקשר בין שתי הנגזרות החלקיות. למשל, נניח שפונקציית הביקוש למוצר מסויים היא $D(x,y)=20-x^2-y$ כאשר x הוא המחיר של המוצר ו-y הוא מחיר של מוצר אחר. באופן הגיוני, $D'_x=-2x<0$, כך שככל שהמחיר מתייקר, הביקוש אליו יורד. אבל כאן מתקיים גם $D'_y=-1<0$, כלומר ככל שהמחיר של המוצר האחר עולה, הביקוש למוצר הראשון, שהמחיר שלו לא השתנה, יורד! מוצרים כאלו נקראים **מוצרים משלימים**, לדוגמא מדפסת ודיו תואם: גם אם מחיר המדפסת לא משתנה, התייקרות של מחיר הדיו תגרום לירידה בביקוש למדפסת. לעומת זאת, אם נניח כי $D(x,y)=20-x^2+y$, נקבל $D'_y=1>0$, כלומר הביקוש למוצר הראשון גדל ככל שהמוצר השני מתייקר. מוצרים כאלו נקראים **מוצרים תחליפיים**, לדוגמא תפוח ירוק ותפוח אדום. התייקרות של תפוחים אדומים תגרום לצרכנים להעדיף תפוחים ירוקים ותגדיל את הביקוש אליהם.

כפי שחישבנו את הנגזרות החלקיות מסדר ראשון, נוכל לחשב גם נגזרות שניות ובאופן כללי נגזרות מכל סדר. הנגזרת החלקית השניה לפי x מתקבלת כאשר גוזרים את $f(x,y)$

פעמיים לפי x ושומרים על y קבוע, ומסומנת $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$ או $f''_{xx}(x,y)$. באותה צורה, הנגזרת השנייה לפי y היא $f''_{yy}(x,y)$ או $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$. מאחר ויש שני משתנים, ניתן להחליף בין הנגזרת הראשונה לשניה את המשתנה שלפיו גוזרים, כלומר לגזור את $f(x,y)$ לפי x ואז לגזור את $f'_x(x,y)$ לפי y. נסמן את **הנגזרת המעורבת** המתקבלת ב-$f''_{xy}(x,y)$ או ב-$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$. אפשר גם לגזור בסדר ההפוך (קודם לפי y ואז לפי x) אבל כל עוד הפונקציה מספיק יפה (וכל הפונקציות בכלכלה הן יפות) סדר הגזירה לא משנה ותמיד נקבל $f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y)$. בהמשך נראה שלנגזרות השניות (כולל הנגזרת המעורבת) יש חשיבות רבה במציאת נקודות הקיצון של הפונקציה (בדיוק כפי שהנגזרת השניה של פונקציה במשתנה בודד עוזרת לקבוע האם נקודת קיצון מסויימת היא מקסימום או מינימום).

תרגיל 6.3. חשבו את כל הנגזרות החלקיות מסדר שני של הפונקציה $f(x,y) = x^2 + \frac{y}{x}$ וודאו כי מתקיים $f''_{xy} = f''_{yx}$.

תרגיל 6.4. נתונה הפונקציה $f(x,y) = x\ln(y) - y\ln(x)$. הוכיחו כי מתקיים $f''_{xy} = f''_{yx}$.

תרגיל 6.5. נתונה הפונקציה $f(x,y) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$. הראו כי מתקיים $f''_{xx} + f''_{yy} = 0$.

לסיום, נציג את ההרחבה של הרעיון של משיק לפונקציה לפונקציות עם שני משתנים. כזכור, המשיק לפונקציה הוא קו ישר החותך את הפונקציה ובעל אותו שיפוע כמו הנגזרת בנקודת החיתוך, ובסביבה קטנה של נקודת החיתוך מהווה קירוב טוב לפונקציה עצמה (ראו איור 4.3). באותה צורה, באמצעות הנגזרות החלקיות אפשר לקבל קירוב טוב לפונקציה בסביבת הנגזרת, הפעם באמצעות מישור המשיק לפונקציה במקום ישר המשיק לפונקציה. לפיכך, אם $f(x,y)$ היא פונקציה בשני משתנים עם נגזרות חלקיות רציפות בנקודה (x_0,y_0), אזי בסביבה קרובה של הנקודה מתקיים

$$f(x,y) \simeq f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0) + f(x_0,y_0) \tag{6.1}$$

התוצאה היא שהערך של הפונקציה כאשר זזים מעט מהנקודה (x_0,y_0) ניתן לחישוב על ידי פירוק התזוזה לשתי תזוזות נפרדות: אחת בציר ה-x ואחת בציר ה-y וסכימת השינוי בפונקציה בשתי תזוזות אלו. כאשר $f'_y = 0$ (הפונקציה לא תלויה ב-y) נקבל בחזרה את הנוסחה למשיק לפונקציה של משתנה בודד.

תרגיל 6.6. חשבו את $f(2.98, 3.01)$ של הפונקציה $f(x,y) = \sqrt{x^3+3y}$ לפי השיטה שתוארה לעיל ביחס לנקודה $(3,3)$.

6.3.2 כלל השרשרת

הגדרנו את $z = D(x,y)$ להיות הביקוש למוצר מסויים כאשר x זה המחיר של המוצר ו-y זה המחיר של מוצר אחר. המשתנים בפונקציה הם x,y והפלט הוא הביקוש המסומן ב-z. שני המחירים משתנים לאורך הזמן t, וניתן לתאר את המחיר כתלות בזמן בתור הפונקציות $x(t), y(t)$. כתוצאה מכך, גם הביקוש הוא פונקציה של הזמן $z(t) = D(x(t), y(t))$ וזו פונקציה של משתנה בודד. למעשה, זו הרכבה של הפונקציה $D(x,y)$ על שתי פונקציות $x(t)$ ו-$y(t)$ וניתן לגזור אותה כפונקציה של t בדומה ל**כלל השרשרת** לפונקציה של משתנה בודד (משפט 4.3):

$$z'(t) = D'_t(x(t),y(t)) = D'_x(x(t),y(t))x'(t) + D'_y(x(t),y(t))y'(t) \tag{6.2}$$

כלומר, הנגזרת של ההרכבה מתקבלת כאשר גוזרים את הפונקציה D לפי כל כיוון בנפרד וכופלים בנגזרת הפנימית לפי t. הנוסחא המתקבלת דומה מאוד לנוסחא 6.1 ומבוססת על אותו הרעיון.

דוגמא 6.1. נגדיר $z = f(x,y) = x^2 - y + 1/y$ ונניח שמתקיים $x(t) = t^2, y(t) = e^t$. חשבו את הנגזרת $z'(t)$ בשתי דרכים שונות: פעם אחת חשבו את $z(t)$ בצורה מפורשת וגזרו אותה ופעם אחת לפי כלל השרשרת.

פתרון. נחשב בצורה מפורשת: $z(t) = x^2(t) - y(t) + \frac{1}{y(t)} = t^4 - e^t + e^{-t}$ לכן $z'(t) = 4t^3 - e^t - e^{-t}$.

כעת נחשב באמצעות כלל השרשרת. מתקיים $x'(t) = 2t$, $y'(t) = e^t$ וכן $D'_x(x,y) = 2x$, $D'_y(x,y) = -1 - 1/y^2$. לכן:

$$z'(t) = 2x(t)\cdot x'(t) + (-1 - 1/y^2(t))\cdot y'(t) = 2t^2\cdot 2t - (1 + e^{-2t})e^t = 4t^3 - e^t - e^{-t}$$

כצפוי, קיבלנו את אותה התוצאה בשתי הדרכים. ■

ניתן להרחיב את כלל השרשרת בשתי דרכים. אם f היא פונקציה של יותר משתנים, אז עבור כל משתנה נוסף נוסיף לנגזרת את הנגזרת של f לפיו כפול הנגזרת הפנימית:

$$f'_t(x(t), y(t), z(t)) = f'_x(x,y,z)x'(t) + f'_y(x,y,z)y'(t) + f'_z(x,y,z)z'(t)$$

האפשרות השניה היא שהמשתנים x, y הם פונקציות של מספר משתנים בעצמם. במקרה כזה, כאשר נגזור לפי אחד מהם, נשמור על השני קבוע כפי שעושים תמיד כשמחשבים נגזרת פנימית. למשל אם $f(x,y)$ היא פונקציה של שני משתנים וכל אחד מהם בעצמו הוא פונקציה של שני משתנים אחרים t, s, אז הנגזרת של f לפי t תהיה

$$f'_t(x(t,s), y(t,s)) = f'_x(x,y)x'_t(t,s) + f'_y(x,y)y'_t(t,s)$$

כלומר, החישוב זהה לחלוטין לכלל השרשרת הקודם כאשר מתייחסים ל-s כאל פרמטר קבוע.

תרגיל 6.7. נתונות הפונקציות $f(x,y) = x^2 + 1/y$, $g(t,s) = e^{ts}$ ו-$h(t,s) = \ln(t) + \ln(s)$. נגדיר $z(t,s) = f(g(t,s), h(t,s))$. חשבו את z'_s ואת z'_t באמצעות כלל השרשרת.

תרגיל 6.8. נתונות הפונקציות $f(x,y) = x^2\ln(y)$, $x(t,s) = t/s$ ו-$y(t,s) = 3t - 2s$. חשבו את f'_t ואת f'_s באמצעות כלל השרשרת.

6.3.3 משפט הפונקציה הסתומה

פונקציה מוגדרת על ידי כלל התאמה בין x לבין $y = f(x)$, והנוסחאות בהן עסקנו עד כה הציגו קשר זה בצורה **מפורשת**, למשל $y = x^2 + 3$. כל ה-x-ים מופיעים באגף ימין, רק y מופיע באגף שמאל ולכן על ידי הצבה ניתן לחשב את ה-y המתאים לכל x. גם הנוסחא $y + \ln(y) = x^2 + 3$ מביעה כל קשר בין x ל-y אבל כדי למצוא את ערך ה-y המתאים ל-x כלשהו, לא מספיק להציב את ה-x בנוסחא אלא יש לבצע פעולה נוספת והיא פתרון של משוואה במשתנה y. למשל $y(0)$ הוא מספר הפותר את המשוואה $y + \ln(y) = 3$. פונקציות המוגדרות על ידי נוסחאות מהסוג הזה נקראות **פונקציות סתומות**, ובפונקציות אלו לא ניתן להציג משתנה אחד בצורה מפורשת באמצעות המשתנה או המשתנים האחרים.

פונקציות סתומות מגיעות בצורה טבעית למשל מעקומות שוות-ערך של פונקציות בשני משתנים. אם $f(x,y)$ היא פונקציה בשני משתנים, אזי כל עקומה שוות-ערך היא פונקציה

מהצורה $f(x,y)=c$ (כאשר $c\in\mathbb{R}$) ובמקרה הכללי הפונקציה הזו מסובכת מכדי לחלץ את y כתלות ב-x. למעשה, כל פונקציה סתומה אפשר לרשום בתור $f(x,y)=0$ כאשר $f(x,y)$ היא איזושהי פונקציה בשני משתנים, כשהרעיון הוא שאפשר תמיד להעביר את הכל לאגף שמאל ולהגדיר אותו בתור f. למשל, הפונקציה הסתומה לעיל תוגדרת על ידי $f(x,y)=y+\ln(y)-x^2-3$ שכן מתקיים $f(x,y)=0$ לכל x,y המקיימים את המשוואה של הפונקציה.

לאור החשיבות של מושג הנגזרת, נרצה לגזור גם פונקציות סתומות ולחשב את $y'(x)$. אבל מאחר ולא נתון לנו $y(x)$ בצורת נוסחא, לא ניתן לבצע את הגזירה על ידי כללי הגזירה שראינו עד כה. במקום זאת, נוכל להשתמש במשפט הפונקציה הסתומה המאפשר לחשב את $y'(x)$ באמצעות הנגזרות החלקיות של f.

משפט 6.1 (משפט הפונקציה הסתומה). נתונה הפונקציה הסתומה $f(x,y)=0$ ונניח שהיא גזירה ובעלת נגזרות חלקיות רציפות. תהי (x_0,y_0) נקודה המקיימת את המשוואה $f(x_0,y_0)=0$. אם $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$ אזי מתקיים

$$y'(x_0)=-\frac{f'_x(x_0,y_0)}{f'_y(x_0,y_0)}$$

הוכחה. נניח ש-x ו-y הן פונקציות של משתנה כלשהו t, ונגזור את שני אגפי המשוואה $f(x(t),y(t))=0$ לפי t. אגף ימין קבוע ונגזרתו 0 ואילו אגף שמאל נגזר לפי כלל השרשרת (נוסחא 6.2):

$$f'_t(x(t),y(t))=f'_x(x(t),y(t))x'(t)+f'_y(x(t),y(t))y'(t)=0$$

לכל t עבורו הנגזרת $f'_y(x(t),y(t))\neq 0$ נעביר אגפים ונקבל $y'(t)=-\frac{f'_x(x(t),y(t))x'(t)}{f'_y(x(t),y(t))}$.

נבחר כעת בפונקציה $x(t)$ להיות $x(t)=t$, כלומר $x=t$. לכן $x'(t)=1$ ולכן $y(t)=y(x)$ ו-$y'(t)=y'(x)$. נציב זאת במשוואה האחרונה ונקבל

$$y'(x_0)=-\frac{f'_x(x_0,y_0)}{f'_y(x_0,y_0)}$$

כדרוש. ■

משפט הפונקציה הסתומה מאפשר לחשב את הנגזרת של y כתלות ב-x כאשר הקשר המפורש ביניהם לא נתון. זו תוצאה חזקה שכן, כפי שראינו, מתוך הנגזרת אפשר ללמוד הרבה על פונקציה: תחומי עליה, ירידה, נקודות קיצון וכד'. בנוסף, ניתן לעשות צעד נוסף ולקרב את $y(x)$ על ידי המשיק $y(x)\simeq y'(x_0)(x-x_0)+y(x_0)$. כלומר, אמנם הקשר המפורש בין x ל-y לא נתון, אבל בכל נקודה באמצעות משפט הפונקציה הסתומה ניתן לקרב את הקשר ביניהם לקשר לינארי ולנתח את ההתנהגות של הפונקציה $y(x)$ בסביבת x_0 באופן זה.

דוגמא 6.2. נתונה הפונקציה הסתומה $x^2e^y+y^2-\ln(x)-1=0$ ונתונה הנקודה $(1,0)$ המקיימת את המשוואה לעיל. חשבו את $y'(1)$.

פתרון. נסמן $f(x,y)=x^2e^y+y^2-\ln(x)-1$. קל לראות כי אכן $f(1,0)=0$, כלומר הנקודה $(1,0)$ נמצאת על גרף הפונקציה. נחשב את הנגזרות החלקיות:

$$f'_x(x,y)=2xe^y-\frac{1}{x},\qquad f'_y(x,y)=x^2e^y+2y$$

ולכן לפי משפט הפונקציה הסתומה, $y'(1) = -\frac{f'_x(1,0)}{f'_y(1,0)} = -\frac{2e^0-1/1}{1^2e^0+2\cdot 0} = -1$
במידת הצורך, ניתן להציב בנוסחת המשיק ולקבל שבקרבת הנקודה $x=1$, הפונקציה היא בקירוב שווה למשיק שלה:

$$y(x) = y'(1)(x-1) + y(1) = -x+1$$

■

התנאי $f'_y \neq 0$ הוא לא רק תנאי טכני הנובע מהחלוקה באפס. כאשר $f'_y = 0$, המשמעות היא שהעקומה שוות הערך של f משיקה לישר המקביל לציר ה-y, כלומר שהנגזרת $y'(x)$ היא אינסופית בנקודה. לדוגמא, הפונקציה $y=\sqrt{x}$ היא כזו שהנגזרת (החד צדדית) בנקודה $x=0$ היא אינסופית, כך שאי אפשר לקרב את הפונקציה בנקודה זו באמצעות ישר משיק.

תרגיל 6.9. נתבונן במשוואה $f(x,y)=0$. כפי שמשוואה זו מגדירה בצורה סתומה את הפונקציה $y(x)$, היא גם מגדירה בצורה סתומה את הפונקציה ההפוכה (כאשר זו קיימת), $x(y)$. הוכיחו כי לכל נקודה (x_0,y_0) המקיימת $f(x_0,y_0)=0$ מתקיים $y'(x_0)x'(y_0)=1$.

תרגיל 6.10. נתונה הפונקציה הסתומה $f(x,y,z) = x^2\sqrt{z}+\frac{y}{z}-\ln(x+y+z)-e = 0$ ונתונה הנקודה $(-1,e,1)$ המתקיימת $f(-1,e,1)=0$. השתמשו במשפט הפונקציות הסתומות כדי לחשב את $z'_y(-1,e)$ ואת $z'_x(-1,e)$.

הערה: משפט הפונקציה הסתומה הוגדר לשני משתנים, אבל ההרחבה ליותר משתנים היא מיידית. למשל בחישוב z'_x המשתנים הרלוונטיים למשפט הפונקציה הסתומה הם x,z ואילו אל y נתייחס כאל פרמטר קבוע.

6.3.4 פונקציות הומוגניות

פונקציה ב-n-משתנים $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ תקרא **פונקציה הומוגנית מדרגה** $k \in \mathbb{N}$ אם מתקיים לכל $(x_1,\ldots,x_n)$ בתחום הגדרתה ולכל $t \in \mathbb{R}$:

$$f(tx_1,\ldots,tx_n) = t^k f(x_1,\ldots,x_n)$$

כלומר, הכפלת כל המשתנים בקבוע t גורמת להכפלת התוצאה ב-t^k. לדוגמר הפונקציה $f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x+3y}$ היא הומוגנית מדרגה 2 מאחר ולכל $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ ולכל $t\in\mathbb{R}$ מתקיים

$$f(tx,ty) = \frac{(tx)^3+(ty)^3}{tx+3ty} = t^2\frac{x^3+y^3}{x+3y} = t^2 f(x,y)$$

בכלכלה, נצפה שפונקציות שהקלט והפלט שלהן הוא כסף יהיו הומגניות מדרגה 1, כלומר שהפונקציה לא תלויה במטבע שבו משתמשים. למשל, אם הערך הנוכחי (NPV) של תזרים מזומנים שבו מקבלים בעוד חודש x_1 שקלים ובעוד חודשיים x_2 שקלים והריבית היא r הוא $f(x_1,x_2) = \frac{x_1}{1+r}+\frac{x_2}{(1+r)^2}$. אם שער החליפין הוא t (כלומר שקל אחד שווה ל-t דולרים) אז הערך הנוכחי של תזרים מזומנים שבו מקבלים בעוד חודש tx_1 דולרים ובעוד חודשיים tx_2 דולרים והריבית היא r יהיה $f(tx_1,tx_2) = \frac{tx_1}{1+r}+\frac{tx_2}{(1+r)^2} = tf(x_1,x_2)$. כלומר - הערך הנוכחי של לקבל שקל בעוד חודש ושקל בעוד חודשיים שווה לערך הנוכחי בדולרים של לקבל t דולרים בעוד חודש ו-t דולרים בעוד חודשיים, שכן בשני המקרים מקבלים אותם סכומי כסף בדיוק (אבל במטבעות אחרים), באותם זמנים ועם אותה ריבית.

דוגמא כלכלית נוספת היא פונקציות ייצור. פונקציות ייצור הומוגניות מדרגה 1 נקראות פונקציות עם תשואה קבועה לגודל (תק"ל). המשמעות היא שאם נכפול את גורמי היצור ב-t, אז הייצור עצמו יוכפל ב-t: שני מפעלים מייצרים בדיוק פי 2 ממפעל אחד.

תרגיל 6.11. האם הפונקציות הללו הומוגניות? אם כן - קבעו מאיזו דרגה. אם לא, הוכיחו שלא.

1. $f(x,y) = \frac{\sqrt{xy}}{x+2y}$.
2. $f(x,y) = xy\ln\left(\frac{x+3y}{4x+y}\right)$.
3. $f(x,y) = 5$.
4. $f(x,y) = Ax^my^n$ כאשר $0 \neq A \in \mathbb{R}$, ו-$m,n \in \mathbb{N}$ קבועים.

הדרך הישירה לבדיקה האם פונקציה היא הומוגנית: הצבת $(tx_1,\ldots,tx_n)$ בפונקציה ובדיקה האם זה שווה ל-$t^kf(x_1,\ldots,x_n)$ לא תמיד פשוטה ליישום כי לא תמיד t ניתן לחילוץ בצורה נוחה מכל מקום בו הוא מופיע בפונקציה. המשפט הבא, התקף לפונקציות גזירות, מספק דרך נוחה לבדוק האם פונקציה היא הומוגנית באמצעות הנגזרות החלקיות שלה.

משפט 6.2 (משפט אוילר). הפונקציה הגזירה $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ היא הומוגנית מדרגה k אם ורק אם

$$kf(x_1,\ldots,x_n) = x_1f'_{x_1}(x_1,\ldots,x_n) + \cdots + x_nf'_{x_n}(x_1,\ldots,x_n)$$

נוודא שהפונקציה $f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x+3y}$ אכן הומוגנית מדרגה 2 באמצעות משפט אוילר. מתקיים

$$f'_x(x,y) = \frac{2x^3+9x^2y-y^3}{(x+3y)^2}, \qquad f'_y(x,y) = \frac{6y^3+3xy^2-3x^3}{(x+3y)^2}$$

ולכן

$$xf'_x(x,y) + yf'_y(x,y) = 2\frac{x^4+3x^3y+xy^3+3y^4}{(x+3y)^2}$$

נזהו אגף ימין של הביטוי המופיע במשפט אוילר. אגף שמאל הינו

$$2f(x,y) = 2\frac{x^3+y^3}{x+3y} = 2\frac{(x^3+y^3)(x+3y)}{(x+3y)^2}$$

ואחרי פתיחת סוגריים נקבל בדיוק את הביטוי הקודם. כלומר, שני הביטויים שווים ואכן הפונקציה הומוגנית מדרגה 2.

תרגיל 6.12. בדקו האם הפונקציות הבאות הומוגניות על פי משפט אוילר. אם כן - קבעו מאיזו דרגה. אם לא, הוכיחו שלא.

1. $f(x,y) = x^y$.
2. $f(x,y) = x^m + x^{m-n}y^n$ עבור $m,n \in \mathbb{N}$.
3. $f(x,y) = x^2+y^2+3x$.
4. $f(x,y) = x^2+xy+y^2+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$.

תרגיל 6.13. הוכיחו כי אם $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ היא פונקציה גזירה והומגנית מדרגה k, אז כל הנגזרות החלקיות מסדר ראשון של f הן הומוגניות מדרגה $k-1$.

תרגיל 6.14. נניח ש-$f,g:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ שתי פונקציות הומגניות מדרגה k. הוכיחו כי הפונקציות $f \pm g$ גם כן הומגניות מדרגה k.

תרגיל 6.15. נניח ש-$f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ הומגנית מדרגה k_f ו-$g:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ הומגנית מדרגה k_g. הוכיחו כי $f \cdot g$ הומגנית מדרגה k_f+k_g ו-f/g הומגנית מדרגה k_f-k_g.

6.4 אופטימיזציה רב-ממדית

אופטימיזציה, קרי מציאת מינימום ומקסימום של פונקציה, היא אחת מהפעולות הבסיסיות של אנליזה בכלכלה. חברות מנסות למקסם רווחים, פרטים מנסים למקסם תועלת, אחרים מנסים למנמם עלות או זיהום וכד'. עבור פונקציות של משתנה בודד ראינו שמציאת נקודות קיצון מתבצעת באמצעות הנגזרת והתהליך דומה גם כאשר ישנם מספר משתנים אך מטבע הדברים מעט יותר מסובך. בשני משתנים, פונקציות נראות כמו פני שטח ולכן מציאת נקודת מקסימום היא בעצם מציאת פסגות הרים ואילו מציאת נקודת מינימום שקולה למציאת הנקודה הנמוכה ביותר בעמק.

אנו מפרידים בין שני סוגי אופטימיזציה. ב**אופטימיזציה ללא אילוצים** מחפשים את המקסימום או המינימום של הפונקציה בכל תחום ההגדרה שלה, ללא שום הגבלה אחרת. ב**אופטימיזציה עם אילוצים**, מחפשים את המקסימום או המינימום של הפונקציה בחלק מתחום ההגדרה המתאים לאילוצים נוספים שיכולים להיות. למשל, צרכן יחפש את המלון הטוב ביותר שהוא יכול למצוא מבלי לחרוג מהתקציב שיש לו לחופשה. המלון שיימצא לא יהיה המלון הטוב ביותר שיש בעיר (זו תהיה התוצאה אם יעשה אופטימיזציה ללא אילוצים), אבל זה המלון הטוב ביותר שהוא יכול להרשות לו.

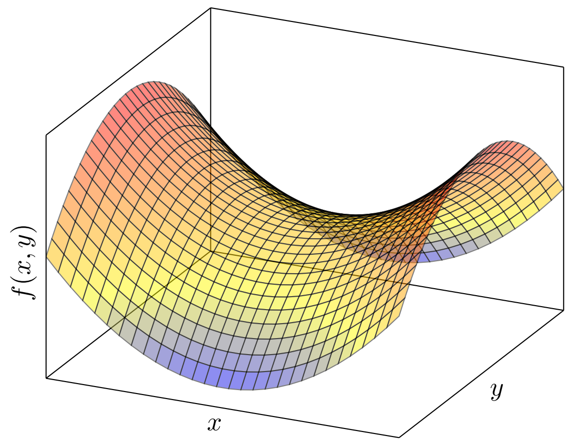
6.4.1 אופטימיזציה ללא אילוצים

באופטימיזציה ללא אילוצים אנחנו מחפשים נקודות קיצון מקומיות (ומוחלטות) בכל תחום ההגדרה של הפונקציה. כמו במקרה של משתנה יחיד, נקודה $(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}$ היא מקסימום מקומי של פונקציה $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ אם לכל $(x_1,\dots,x_n)$ בסביבת $(a_1,\dots,a_n)$ מתקיים $f(a_1,\dots,a_n)\geq f(x_1,\dots x_n)$ ומינימום מקומי אם אי השיוויון הפוך. מכאן והלאה נעסוק רק בפונקציות שהן גזירות בכל תחום הגדרתן וב-$n=2$, לדוגמא הפונקציה בעלת המקסימום המקומי המתוארת באיור 6.1.

על כל פונקציה במספר משתנים אפשר להסתכל כעל פונקציה במשתנה בודד כאשר שאר המשתנים קבועים. למשל $g(x)=f(x,a_2)$ היא פונקציה של משתנה בודד x כאשר הערך של $y=a_2$ קבוע. מההגדרה לעיל, אם (a_1,a_2) הוא מקסימום מקומי של $f(x,y)$, אז בהכרח a_1 הוא מקסימום מקומי של $g(x)$: אנחנו למעשה מקבעים את המשתנה y בערך הקיצון a_2 ומרשים תזוזה רק בציר ה-x. אם נקודה מסויימת היא מקסימום מקומי והערך של הפונקציה בה גדול מהערכים בסביבתה כאשר מאפשרים תזוזות לכל הכיוונים, בפרט זה נכון כאשר מאפשרים תזוזות רק בציר ה-x. לכן אם (a_1,a_2) הוא מקסימום מקומי של הפונקציה $f(x,y)$, אז גם a_1 הוא מקסימום מקומי של $g(x)$ ו-a_2 הוא מקסימום מקומי של $h(x)=f(a_1,a_2)$. כלומר - מקסימום (מינימום) מקומי של פונקציה בשני משתנים היא גם נקודת מקסימום (מינימום) מקומי של הפונקציה שמתקבלת כאשר משנים רק אחד מהמשתנים ומחזיקים את השני קבוע.

בשני משתנים יכול להיות מצב מעניין בו נקודה מסויימת היא מקסימום במשתנה אחד ומינימום במשתנה אחר, דוגמת הפונקציה $f(x,y)=x^2-y^2$ בנקודה $(0,0)$. עבור $y=0$, הפונקציה היא $g(x)=f(x,0)=x^2$ והנקודה $x=0$ היא מינימום מקומי במשתנה x. לעומת זאת, עבור $x=0$, הפונקציה היא $h(y)=f(0,y)=-y^2$ והנקודה $y=0$ היא מקסימום מקומי במשתנה y. לכן $(0,0)$ אינה מינימום מקומי ואינה מקסימום מקומי של הפונקציה $f(x,y)$, שכן יש כיוונים בהם אפשר להתקדם ולעלות בערכי הפונקציה ויש כיוונים בהם אפשר לרדת. נקודה כזו נקראת נקודת אוכף כי היא נראית כמו אוכף של סוס (או פרינגלס, ראו איור 6.4): אוכף של סוס היא נקודת מינימום מקומי אם הולכים לאורך הסוס לכיוון הראש ומקסימום מקומי אם הולכים לצדדים (איפה שהרגליים של הרוכב נמצאות).

בכל אופן, נקודות החשודות כנקודות קיצון של פונקציה עם מספר משתנים, הנקראות



איור 6.4: פונקציה בעלת נקודת אוכף.

נקודות סטציונריות, הן בפרט נקודות החשודות כקיצון כפונקציה של משתנה אחד ולכן בהכרח הנגזרת לפי כל משתנה צריכה להתאפס. לכן, כדי למצוא נקודות סטציונריות יש לגזור את הפונקציה לפי כל משתנה ולבדוק באיזו נקודה כל הנגזרות מתאפסות **ביחד**. יחד עם זאת, התאפסות הנגזרות היא תנאי הכרחי לנקודת קיצון, אבל לא תנאי מספיק ולא כל נקודה סטציונרית היא בהכרח נקודת קיצון! בפונקציה של משתנה בודד, ראינו למשל שהנגזרת של x^3 מתאפסת ב-$x = 0$ אבל זו לא נקודת קיצון. כדי לסווג את טיב נקודת הקיצון מתבססים על נגזרת שניה:

משפט 6.3 (סיווג נקודות סציונריות). תהי $f(x,y)$ פונקציה גזירה בשתי משתנים ותהי (a_1,a_2) נקודה סטציונרית של הפונקציה. נגדיר את הדטרמיננטה שלה:

$$\Delta_f(a,b) = f''_{xx}(a,b) \cdot f''_{yy}(a,b) - (f''_{xy}(a,b))^2$$

מתקיים:

1. אם $\Delta_f(a,b) < 0$, אז הנקודה (a,b) היא נקודת אוכף של $f(x,y)$.
2. אם $\Delta_f(a,b) > 0$ וגם $f''_{xx}(a,b) > 0$ וגם $f''_{yy}(a,b) > 0$ אז (a,b) היא נקודת מינימום.
3. אם $\Delta_f(a,b) > 0$ וגם $f''_{xx}(a,b) < 0$ וגם $f''_{yy}(a,b) < 0$ אז (a,b) היא נקודת מקסימום.
4. אם $\Delta_f(a,b) = 0$ אז לא ניתן לקבוע לפי הדטרמיננטה את סוג נקודת הקיצון.

תהליך האופטימיזציה ללא אילוצים, קרי מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה, מתבצע באופן הבא:

1. חישוב הנגזרות החלקיות מסדר ראשון של הפונקציה.
2. מציאת כל הנקודות הסטציונריות: הנקודות בהן כל הנגזרות החלקיות מסדר ראשון מתאפסות.

3. סיווג הנקודות הסטציונריות לפי מבחן הדטרמיננטה.

דוגמא 6.3. מצאו וסווגו את כל הנקודות הסטציונריות של הפונקציה $f(x,y) = (y-2)\ln(xy)$.

פתרון. נחשב את הנגזרות הראשונות:

$$f'_x(x,y) = \frac{y-2}{x}, \qquad f'_y(x,y) = \ln(xy) + \frac{y-2}{y}$$

הדרישה $f'_x(x,y) = 0$ מתקיימת רק עבור $y = 2$ (לכל ערך של x). נציב זאת במשוואה $f'_y(x,y) = 0$ ונקבל $f'_y(x,2) = \ln(2x) = 0$, לכן $x = 0.5$. הנקודה הסטציונרית היחידה של הפונקציה היא $(0.5, 2)$.

נחשב את הנגזרות השניות:

$$f''_{xx}(0.5,2) = -\left.\frac{y-2}{x^2}\right|_{\substack{x=0.5\\y=2}} = 0, \qquad f''_{xy}(0.5,2) = \left.\frac{1}{x}\right|_{\substack{x=0.5\\y=2}} = 2$$

אפשר לוותר על חישוב f''_{yy} ונקבל $\Delta_f(0.5,2) = 0 \cdot f''_{yy} - 2^2 = -4 < 0$ לכן הנקודה הסטציונרית היא נקודת אוכף. ■

תרגיל 6.16. מצאו וסווגו את כל הנקודות הסטציונריות של הפונקציות:

א. $f(x,y) = 4x + 2y - x^2 + xy - y^2$.

ב. $f(x,y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$.

6.4.2 אופטימיזציה עם אילוצים

באופטימיזציה עם אילוצים אנחנו מחפשים נקודות קיצון מקומיות (ומוחלטות) של פונקציה מסויימת שמקיימות בנוסף גם אילוץ מסויים. למשל, במשתנה בודד נרצה למצוא את המקסימום של הפונקציה $f(x) = 4 - x^2$ תחת האילוץ $x \geq 2$. המקסימום של הפונקציה (ללא אילוצים) מתקבל בנקודה $x = 0$ שאינה מקיימת את האילוץ. קל לראות שהפונקציה יורדת בתחום $x \geq 2$ ולכן המקסימום של הפונקציה תחת האילוץ $x \geq 2$ מתקבל בנקודה $x = 2$. אבל בנקודה זו הנגזרת של הפונקציה לא מתאפסת, ולכן השיטה שבה נקטנו קודם, גיזרה והשוואת הנגזרת לאפס, לא תעבוד כמו שהיא.

מבחינה כלכלית, אופטימיזציה עם אילוצים מייצגת בעיות בהן יש מגבלה על מרחב הפרמטרים, למשל משיקולי תקציב, זמן, או השקעה מינימלית. למשל, צרכן יכול לקנות מים (במחיר 1 ש"ח לליטר) או מיץ (במחיר של 10 ש"ח לליטר). התועלת מצריכת x ליטרים של מים ו-y ליטרים של מיץ היא $f(x,y) = 2x^2 - xy + 3y^2$, אבל לצרכן יש בסה"כ 20 ש"ח, ולכן עליו לעמוד במגבלת התקציב $g(x,y) = x + 10y = 20$. בנוסף, אפשר לחשוב על אילוצים מהצורה $x \geq 0, y \geq 0$ (לא ניתן לקנות כמויות שליליות) או אילוצים מורכבים יותר, דוגמאת $x + y \geq 2$ (חייבים לרכוש לפחות 2 ליטרים של משקה כדי לא להתייבש). אנחנו נלמד איך לפתור בעיות אופטימיזציה עם שיוויונות ונשאיר את העיסוק באי-שיוויונים לקורסים מתקדמים.

בשני משתנים, בעיית אופטימיזציה עם אילוצים של שיוויון תהיה מהצורה הבאה: מציאת המקסימום או המינימום (ניסוח הבעיה והפתרון זהים בשני המקרים) של הפונקציה $f(x,y)$ תחת האילוץ $g(x,y) = 0$ כאשר $f(x,y), g(x,y)$ הן שתי פונקציות גזירות. הפתרון מתבסס על הוספת משתני עזר, הנקראים כופלי לגרנז', ומציאת נקודות סטציונריות של פונקציית עזר הנקראת לגרנז'יאן:

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$$

כאשר λ הוא כופל לגרנז' של האילוץ $g(x,y)=0$ ואנחנו מתייחסים אליו כאל משתנה נוסף בבעיה.

משפט 6.4. נתבונן בבעיית האופטימיזציה של $f(x,y)$ עם האילוץ $g(x,y)=0$. כל נקודת קיצון (a_1,a_2) של בעיית האופטימיזציה מקיימת את המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} L'_x(x,y,\lambda)=f'_x(x,y)+\lambda g'_x(x,y) & =0\\ L'_y(x,y,\lambda)=f'_y(x,y)+\lambda g'_y(x,y) & =0\\ L'_\lambda(x,y,\lambda)=g(x,y) & =0\end{cases}$$

כלומר יש למצוא את הנקודות המאפסות את שלושת הנגזרות של הלגרנז'יאן בו זמנית.

ההרחבה לפונקציות עם יותר משתנים זהה. למשל בעיית אופטימיזציה של פונקציה עם שלושה משתנים $f(x,y,z)$ ואילוץ מהצורה $g(x,y,z)=0$ תדרוש לרשום את הלגרנז'יאן $L(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+\lambda g(x,y,z)$, לגזור לפי כל אחד מארבעת המשתנים ולמצוא נקודות שמאפסות אל כל הנגזרות בו זמנית. כאשר ישנם יותר אילוצים, נוסיף לכל אילוץ משתנה עזר נוסף. למשל, אם נוסיף גם את האילוץ $h(x,y,z)=0$ נקבל את הלגרנז'יאן $L(x,y,z,\lambda_g,\lambda_h)=f(x,y,z)+\lambda_g g(x,y,z)+\lambda_h h(x,y,z)$.

דוגמא 6.4. מצאו את כל הנקודות הסטציונריות בבעיית האופטימיזציה של הפונקציה $f(x,y)=x^2+y^2$ תחת האילוץ $g(x,y)=x^2+y^2-2x-4y-15=0$.

פתרון. נכתוב בצורה מפורשת את הלגרנז'יאן:

$$L(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda(x^2+y^2-2x-4y-15)$$

ונחשב את הנגזרות מסדר ראשון לפי כל משתנה:

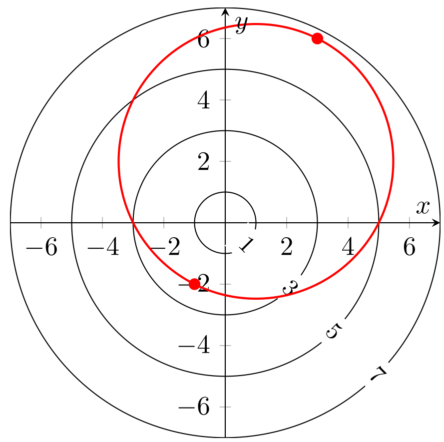
$$\begin{cases} L'_x(x,y,\lambda)=f'_x(x,y)+\lambda g'_x(x,y)=2x+\lambda(2x-2) & =0\\ L'_y(x,y,\lambda)=f'_y(x,y)+\lambda g'_y(x,y)=2y+\lambda(2y-4) & =0\\ L'_\lambda(x,y,\lambda)=g(x,y)=x^2+y^2-2x-4y-15 & =0\end{cases}$$

פתרון של המשוואה הראשונה ייתן $x=\frac{\lambda}{1+\lambda}$ ופתרון של המשוואה השניה ייתן $y=\frac{2\lambda}{1+\lambda}$. נציב שני ביטויים אלו במשוואה השלישית ונקבל

$$\frac{\lambda^2}{(1+\lambda)^2}+\frac{4\lambda^2}{(1+\lambda)^2}-\frac{2\lambda}{1+\lambda}-\frac{8\lambda}{1+\lambda}-15=0$$

אחרי הוצאת מכנה משותף וסידור המשוואה נקבל את המשוואה הריבועית $4\lambda^2+8\lambda+3=0$ שפתרונותיה הם $\lambda=-0.5,-1.5$. נציב בחזרה ונקבל שיש שתי נקודות סטציונריות. עבור $\lambda=-0.5$ נקבל את הנקודה הסטציונרית $(-1,-2)$ ועבור $\lambda=-1.5$ נקבל את הנקודה הסטציונרית $(3,6)$. נציב ונקבל $f(-1,-2)<f(3,6)$ כלומר $(-1,-2)$ היא נקודת המינימום של הפונקציה בכפוף לאילוץ $g(x,y)=0$ ו-$(3,6)$ היא נקודת המקסימום. ■

ניתן לראות את ייצוג גרפי של בעיה 6.4 באיור 6.5. הקווים השחורים מתארים את הקונטורים של הפונקציה $f(x,y)$, שעולה ככל שמתרחקים מראשית הצירים. לכן ללא אילוצים לפונקציה אין מקסימום ויש מינימום ב-$(0,0)$. האילוץ $g(x,y)=0$ מיוצג על ידי הקו האדום, כלומר אנחנו מחפשים את המקסימום והמינימום של הפונקציה אך ורק מבין



איור 6.5: מפת קונטורים של הפונקציה המוצגת בבעיה 6.4 וכן האילוץ. לפונקציה מקסימום ומינימום גדולים יותר מאלו שנמצאו, אך הם לא עומדים באילוץ.

הנקודות שנמצאות על הקו האדום. הנקודה $(3,6)$ היא הנקודה הרחוקה ביותר מראשית הצירים שמקיימת את האילוץ, ולכן שם הפונקציה מקבלת את הערך המקסימלי בכפוף לאילוץ. בדומה, הנקודה $(-1,-2)$ היא הקרובה ביותר, ושם הפונקציה מקבלת מינימום בכפוף לאילוץ.

נניח ובדוגמא 6.4 האילוץ היה $g(x,y)=x+y=0$ במקום האילוץ המקורי. לכן יש למצוא מינימום של $f(x,y)=x^2+y^2$ בכפוף לאילוץ $x+y=0$. במקרה כזה הלגרנז'יאן הוא $L(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda(x+y)$ והפתרון היחיד של בעיית האופטימיזציה עם האילוץ הינו $x=y=\lambda=0$. נשים לב ש-$x=y=0$ הוא מינימום של הפונקציה גם ללא אילוץ, כלומר במקרה הזה האילוץ כולל את נקודת הקיצון הרגילה של הפונקציה, ולכן $\lambda=0$. התפקיד של כופל לגרנז' אם כך הוא לאפס את הנגזרת של הפונקציה על גבי האילוץ כשזה נדרש, כפי שקרה בדוגמא 6.4. אם נקודת הקיצון נמצאת על האילוץ כבר, הנגזרות מתאפסות מאליהן וכופל לגרנז' לא נדרש והוא מתאפס.

תרגיל 6.17. מצאו את כל הנקודות הסטציונריות בבעיות האופטימיזציה הבאות:

1. $f(x,y)=x^2y^2$ בכפוף לאילוץ $g(x,y)=x+y-12=0$, בתחום $x>0$ וגם $y>0$.
2. $f(x,y)=x^5+y^5$ בכפוף לאילוץ $g(x,y)=x^3+y^3-2=0$ בתחום $x>0$ וגם $y>0$.
3. $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ בכפוף לאילוצים $g_1(x,y,z)=x^2-xy+y^2-z^2-1=0$ ו-$g_2(x,y,z)=x^2+y^2-1=0$.

6.5 תרגילים מסכמים

תרגיל 6.18. נתונה הפונקציה $f(x,y)=\ln(e^x+e^y)$. הראו כי המשוואות הבאות מתקיימות:

1. $f'_x(x,y)+f'_y(x,y)=1$.
2. $f''_{xx}(x,y)\cdot f''_{yy}(x,y)=(f''_{xy}(x,y))^2$.

תרגיל 6.19. נתונה הפונקציה $f(x,y)=x^y$. חשבו את הנגזרות השניות המעורבות של הפונקציה והראו שמתקיים $f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y)$

תרגיל 6.20. נתונה פונקציה גזירה בשלושה משתנים $f(x,y,z)$ ונגדיר פונקציה חדשה $g(x,y,z)=f(x-y,y-z,z-x)$. הראו שמתקיים $g'_x(x,y,z)+g'_y(x,y,z)+g'_z(x,y,z)=0$.

תרגיל 6.21. נתונות שתי פונקציות גזירות של משתנה בודד $f(x),g(x)$.

1. נגדיר $h(x,y)=f(x-ay)+g(x+ay)$ כאשר $a\in\mathbb{R}$ קבוע. הראו שמתקיים $h''_{yy}(x,y)=a^2h''_{xx}(x,y)$.
2. נגדיר $h(x,y)=xf(x+y)+yg(x+y)$. הראו שמתקיים $h''_{xx}(x,y)-2h''_{xy}(x,y)+h''_{yy}(x,y)=0$.

תרגיל 6.22. נתונה הפונקציה הסתומה $x^2y-e^{y-x}+\ln(xy)=0$.

1. מצאו את הערך של y עבור $x=1$.
2. האם ניתן להשתמש במשפט הפונקציה הסתומה כדי להציג את y כפונקציה של x בסביבת הנקודה שמצאתם בסעיף הקודם? אם כן - חשבו את $y'(1)$.
3. בדקו האם ניתן להשתמש במשפט הפונקציה הסתומה כדי להציג את x כפונקציה של y בסביבת הנקודה שמצאתם בסעיף הראשון. אם כן, חשבו את $x'(y_0)$, כאשר $y_0=y(1)$ הוא הפתרון לסעיף הראשון.

תרגיל 6.23. נתונה הפונקציה הסתומה $\frac{x^2y}{z}-ze^{y-x}+\ln(xy)+1.5=0$ ונתונה הנקודה $(x_0,y_0,z_0)=(1,1,2)$.

1. בדקו שהנקודה (x_0,y_0,z_0) אכן מקיימת את המשוואה הנתונה.
2. בדקו האם ניתן להשתמש במשפט הפונקציה הסתומה כדי להציג את y כפונקציה של x ואם כן, חשבו את $y'_x(1,2)$.
3. חזרו על הסעיף הקודם עבור y כפונקציה של z בנקודה המתאימה.
4. חזרו על שני הסעיפים הקודמים עבור x כפונקציה של y ועבור x כפונקציה של z.

תרגיל 6.24. נתון כי הפונקציה $f(x,y)$ הומוגנית מדרגה 2, וכן כי $f(1,2)=3$ ו-$f'_x(2,4)=2$. חשבו את $f'_y(2,4)$.

תרגיל 6.25. נתון כי $f(x,y)$ הומוגנית מדרגה 3 ונתון כי $f(1,0.5)=2$ ו-$f'_x(2,1)=1$. חשבו את $f'_y(4,2)$.

תרגיל 6.26. נתונה פונקציה הומוגנית מדרגה 12, $f(x,y)$. בדקו האם הפונקציות הבאות הומוגניות. אם כן - מצאו את הדרגה. אם לא - מצאו דוגמא נגדית.

1. $g(x,y)=xyf\left(\frac{x^3}{y},\frac{y^3}{x}\right)$.
2. $g(x,y)=f'_x\left(\frac{x^2}{x+y},\frac{y^2}{x+y}\right)$.

תרגיל 6.27. תנו דוגמא לפונקציה $f(x,y)$ כך ש-$f'_x(x,y)$ הומוגנית ואילו $f'_y(x,y)$ אינה הומוגנית.

תרגיל 6.28. מצאו וסווגו את נקודות הקיצון המקומיות של הפונקציות הבאות:

1. $f(x,y) = x^2 - (y-1)^2$.
2. $f(x,y) = x^2+xy+y^2+1/x+1/y$.
3. $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$.
4. $f(x,y) = x^3y^2(12 - x - y)$ בתחום $x > 0$ וגם $y > 0$.
5. $f(x,y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$ בתחום $x > 0$.
6. $f(x,y) = e^{x/2}(x + y^2)$.
7. $f(x,y) = x^3 - y^3 - 3xy$.
8. $f(x,y) = 1 - \sqrt{(x^2 + y^2)^3}$.

תרגיל 6.29. מצאו את הנקודות הסטציונריות של הפונקציות הבאות בכפוף לאילוצים הנתונים:

1. $f(x,y) = x^2 + y^2$ תחת האילוץ $x^2 - 2x + y^2 - 4y = 0$.
2. $f(x,y) = 4x^2 - 4xy + y^2$ תחת האילוץ $x^2 + y^2 = 25$.
3. $f(x,y) = 1+1/x+1/y$ תחת האילוץ $1/x^2 + 1/y^2 = 1/8$.
4. $f(x,y) = \ln(xy)$ תחת האילוץ $x^3 + xy + y^3 = 0$.
5. $f(x,y,z) = 2x^2 + 3y^2 + 4z^2$ תחת האילוץ $x + y + z = 13$.
6. $f(x,y,z) = x-2y-2z$ תחת האילוץ $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.
7. $f(x,y,z) = xy^2z^3$ תחת האילוץ $x + y + z = 12$ בתחום $x,y,z > 0$.

7 פתרונות לתרגילים

7.1 פתרונות לפרק 1

פתרון לשאלה 1.1

1. הפונקציה מוגדרת כאשר המכנה שונה מ-0 וכאשר הביטוי שבתוך השורש אי-שלילי. לכן נדרוש $4 - x^2 > 0$ כלומר $(-2, 2)$.
2. כל אחד מה-$\ln$-ים מוגדר כאשר הביטוי שבפנים חיובי, כלומר $x + 2 > 0$ וגם $x - 2 > 0$. תחום ההגדרה הוא החיתוך בין שני התחומים הללו, קרי $(2, \infty)$.
3. כל ביטוי בתוך שורש צריך להיות אי-שלילי, לכן $x^2 - 3x + 2 \geq 0$ וכן $3 + 2x - x^2 \geq 0$. בנוסף, המכנה לא יכול להתאפס ולכן $3 + 2x - x^2 > 0$.

   מאי-השוויון הראשון נקבל $x \geq 2$ או $x \leq 1$ ומאי השוויון השני נקבל $-1 < x < 3$. לכן תחום ההגדרה הינו $\{x | x \in (-1, 1]$ או $x \in [2, 3)\}$.
4. אסור שהמכנה יתאפס, לכן תחום ההגדרה הוא $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. שימו לב שלמרות ש-$x$ יכול להצטמצם, ואז ניתן להציב $x = 0$ בביטוי המצומצם, תחום ההגדרה נקבע לפי האופן בו הפונקציה מוגדרת וכתובה.
5. עבור $x \geq 1$ הפונקציה היא מהצורה $1/x$ ומוגדרת לכל $x \neq 0$. מאחר ו-0 לא בתחום זה, הרי שהפונקציה מוגדרת לכל $x \geq 1$.

   בתחום $x < 1$, הפונקציה מוגדרת לכל $x \geq 0$ ולכן תחום ההגדרה של הפונקציה הינו $[0, \infty)$.
6. ה-$\ln$ מוגדר כאשר הביטוי שבתוכו חיובי: $(3 - 2x)(1 - x) > 0$. בנוסף, השורש מוגדר כאשר ה-$\ln$ הוא חיובי, ומתקיים $\ln(x) \geq 0$ אם ורק אם $x \geq 1$. לכן לא מספיק שהביטוי בתוך ה-$\ln$ יהיה חיובי, אלא נדרוש $(3 - 2x)(1 - x) \geq 1$. נפתור את אי-השוויון ונקבל שתחום ההגדרה הוא $\{x | x \leq 1/2$ או $x \geq 2\}$.
7. שימו לב שמלכתחילה הפונקציה לא מוגדרת ב-$x = 1$. פרט לכך, בתחום $x < 1$ הפונקציה מוגדרת כל עוד הביטויים בתוך השורשים אי-שליליים והמכנה אינו מתאפס, כלומר $2 - x \geq 0$ וגם $4 - 3x \geq 0$ וגם $x^2 - 3x + 2 \neq 0$. שני האי-שוויונים מתקיימים תמיד כאשר $x < 1$ והמשוואה הריבועית מתאפסת ב-$x = 1, 2$ לכן כל התנאים מתקיימים כאשר $x < 1$.

   בתחום $x > 1$, הפונקציה לא מוגדרת כאשר המכנה מתאפס כלומר כאשר $x = \pm 1$. שתי הנקודות לא בתחום, לכן הפוקנציה מוגדרת לכל $x > 1$.

   לסיכום, הפונקציה מוגדרת לכל $x \neq 1$.
8. כדי שה-$\ln$ יהיה מוגדר נדרוש $e^x - 1 > 0$ כלומר $x > 0$. כדי שהשורש יהיה מוגדר, נדרוש $(-x - 3)(1 + x) \geq 0$, כלומר $-3 \leq x \leq -1$.

   שני התנאים לא יכולים להתקיים בו זמנית, ולכן הפונקציה לא מוגדרת לאף x ותחום ההגדרה ריק.

פתרון לשאלה 1.2

1. הפונקציה איננה מונוטונית. מצד אחד, $2 < 1$ ומתקיים $f(2) < f(1)$, ומצד שני $-2 < 1$ ומתקיים $f(-2) < f(1)$.

   שימו לב שקיימים תחומי ירידה ועליה: בתחום $x > 0$ הפונקציה יורדת ממש ובתחום $x < 0$ הפונקציה עולה ממש. אבל השאלה עוסקת בעליה וירידה **בכל תחום ההגדרה**, וכאמור, הפונקציה אינה מונוטונטית בכל תחום ההגדרה.

2. תחום ההגדרה הוא $x > 0$ כדי שהמכנה לא יתאפס וכדי שהביטוי שבתוך ה-ln יהיה חיובי. בתחום זה, אם $x_1 < x_2$ אז $1/x_2 < 1/x_1$ ומאחר והפונקציה ln היא פונקציה עולה, מתקיים בהכרח $\ln(1/x_2) < \ln(1/x_1)$. קיבלנו ש-$x_1 < x_2$ גורר $f(x_1) > f(x_2)$, לכן הפונקציה יורדת ממש.

3. לכל $x_1 < x_2$ מתקיים $f(x_1) \geq f(x_2)$ וכן $f(x_1) \leq f(x_2)$ (למעשה מתקיים רק השיוויון בשני הביטויים הללו) ולכן הפונקציה גם עולה וגם יורדת (אבל בשני המקרים, לא ממש).

4. לכל $x_1 < x_2$ מתקיים $2^{x_1} < 2^{x_2}$ ולכן $f(x_1) = 2^{-x_1} > 2^{-x_2} = f(x_2)$, כלומר הפונקציה יורדת ממש.

פתרון לשאלה 1.3

1. אם $x_1 \neq x_2$ אז גם $2x_1 \neq 2x_2$ ולכן $f(x_1) \neq f(x_2)$, כלומר הפונקציה חח"ע.

   בנוסף, לכל $y \in \mathbb{R}$ מתקיים $f\left(\frac{y+1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{y+1}{2} - 1 = y$, לכן הפונקציה היא על.

2. הפונקציה לא חח"ע: $f(-2) = 2 + 4 = f(2)$.

   הפונקציה לא על: לכל $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = |x| + 4 > 3$ כי $|x| \geq 0$, לכן $3 \in \mathbb{R}_+$ לא בתמונה של הפונקציה. התמונה של הפונקציה היא $[4, \infty)$.

3. הפונקציה חח"ע: אם $x_1 \neq x_2$ אז גם $1/x_1 \neq 1/x_2$.

   הפונקציה על: לכל $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ מתקיים $f(1/y) = y$.

4. הפונקציה לא חח"ע: $f(1) = 1/2 = f(-1)$.

   הפונקציה לא על: לכל $x < 0$ מתקיים $2^x < 2^0 = 1$ ולכל $x \geq 0$ מתקיים $0.5^x \leq 0.5^0 = 1$. לכן לכל x מתקיים $f(x) \leq 1$ ומספרים גדולים יותר לא מתקבלים על ידי הפונקציה. התמונה של הפונקציה אם כך היא $(0, 1]$.

פתרון לשאלה 1.4

נניח בלי הגבלת הכלליות כי הפונקציה עולה ממש (משמע ההוכחה למקרה שהפונקציה יורדת ממש זהה עד כדי שינויים פשוטים). נניח $x_1 \neq x_2$. אזי או $x_1 < x_2$ ואז $f(x_1) < f(x_2)$ או להפך. בשני המקרים, $f(x_1) \neq f(x_2)$ כלומר הפונקציה חח"ע.

פתרון לשאלה 1.5

1. הפונקציה חח"ע: אם $x_1 \neq x_2$ אז גם $x_1 + 1 \neq x_2 + 1$ והפונקציה על: לכל $y \in \mathbb{R}$, $f(y-1) = y$. לכן הפונקציה הפיכה. הפונקציה ההופכית היא $f^{-1}(x) = x - 1$.

2. הפונקציה לא חח"ע כי $f(-1) = e^1 = f(1)$ ולכן אינה הפיכה.

3. הפונקציה חח"ע ועל לפי תרגיל 1.3 ולכן הפיכה. הפונקציה ההופכית היא הפונקציה עצמה $f^{-1}(x) = f(x) = 1/x$ שהרי מתקיים $f(f(x)) = 1/f(x) = 1/(1/x) = x$.

4. הפונקציה חח"ע: $x_1 \neq x_2$ גורר $x_1 - 5 \neq x_2 - 5$ ולכן $\sqrt{x_1 - 5} \neq \sqrt{x_2 - 5}$.

   הפונקציה על: לכל $y \in \mathbb{R}_+$ מתקיים $y^2 + 5 \geq 5$ ולכן בתחום ההגדרה של f ומתקיים $f(y^2 + 5) = \sqrt{y^2 + 5 - 5} = y$.

   לכן הפונקציה הפיכה ומתקיים $f^{-1}(x) = x^2 + 5 : \mathbb{R}_+ \to \{x \in \mathbb{R} | x \geq 5\}$.

פתרון לשאלה 1.6

1. הפונקציה מוגדרת כאשר המכנה לא מתאפס, כלומר לכל $x \neq 1/2$.

   הפונקציה לא חח"ע. למשל, נבדוק כמה פעמים היא מקבלת את הערך 4 על ידי פתרון המשוואה $f(x) = 4$, כלומר $\frac{x^2+3}{2x-1} = 4$. אחרי מכנה משותף והעברת אגפים נקבל $x^2 + 3 - 8x + 4 = 0$ וזו משוואה ריבועית עם שני פתרונות $x = 1, 7$. לכן $f(1) = f(7)$ כך שהפונקציה איננה חח"ע.

2. הפונקציה מוגדרת כאשר כל ביטוי שבתוך שורש אי-שלילי וכן כאשר הביטוי בתוך ה-$\ln$ חיובי. לכן $x^2 \geq 1$ וכן $1 - 4x^2 > 0$ ואין אף x המקיים את שתי הדרישות בו זמנית. לכן הפונקציה לא מוגדרת לאף x וממילא השאלה האם היא חח"ע או לא חסרת משמעות.

3. הפונקציה מוגדרת כאשר הביטוי בתוך השורש אי-שלילי וכן $x \neq 1$. הביטוי בשורש אי-שלילי כאשר $(1-x)(1+x) \geq 0$ ולכן תחום ההגדרה הוא $-1 \leq x < 1$.

   נוכיח כי הפונקציה חח"ע על ידי כך שנוכיח שהיא יורדת ממש. יהיו $x_2 > x_1$ שני ערכים בתחום ההגדרה. מתקיים $1 + x_2 > 1 + x_1$ וכן $1 - x_1 > 1 - x_2 > 0$ לכן $\frac{1+x_2}{1-x_2} > \frac{1+x_1}{1-x_1}$ ואותו אי השיוויון מתקיים גם בין השורשים של הביטויים. בנוסף, $x_1 - 2 < x_2 - 2 < 0$ לכן אם נכפול את אי השיוויון בין השורשים באי השיוויון הזה, הסימן יתהפך ונקבל $(x_2 - 2)\sqrt{\frac{1+x_2}{1-x_2}} < (x_1 - 1)\sqrt{\frac{1+x_1}{1-x_1}}$ וממילא שני הערכים שונים, כך ש-$f(x_2) \neq f(x_1)$.

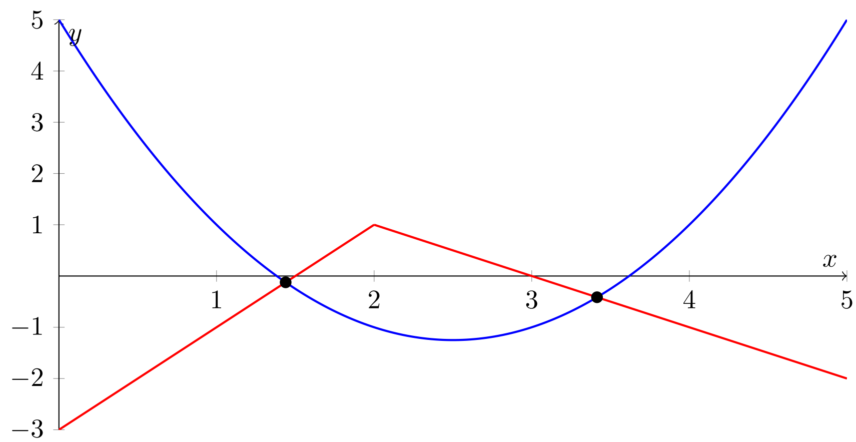
פתרון לשאלה 1.7

מהשרטוט רואים שהפונקציות נחתכות בשתי נקודות x_1, x_2 ומתקיים $f(x) > g(x)$ כאשר $x_1 < x < x_2$ ו-$g(x) > f(x)$ אחרת. פתרון של המשוואה $f(x) = g(x)$ בכל תחום יתן את נקודות החיתוך: $x_1 = 7/2 - \sqrt{17}/2$ ו- $x_2 = 2 + \sqrt{2}$.

פתרון לשאלה 1.8

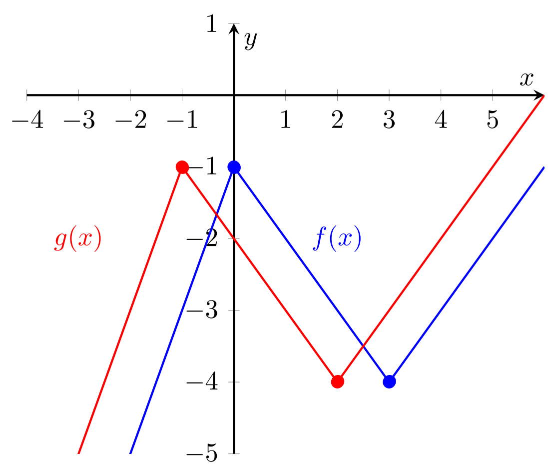
הפונקציה $g(x) = f(x+1)$ מחשבת את ערך ה-f של $x+1$. למשל $g(2) = f(3) = -3 - 1 = -4$. בכדי לחשב את $g(x)$ בצורה מפורשת, נציב בהגדרה של f את $x+1$ בכל מקום במקום x:

$$g(x) = f(x+1) = \begin{cases} 2(x+1) - 1, & (x+1) \leq 0 \\ -(x+1) - 1, & 0 < (x+1) \leq 3 \\ (x+1) - 7, & (x+1) > 3 \end{cases} = \begin{cases} 2x + 1, & x \leq -1 \\ -x - 2, & -1 < x \leq 2 \\ x - 6, & x > 2 \end{cases}$$



איור 7.1: הפונקציות $f(x)$ ו-$g(x)$ הנתונות בתרגיל 1.7.

מבחינה מעשית, המשמעות של ההצבה $f(x+1)$ היא הזזה של הפונקציה ביחס לציר ה-x ביחידה אחת. לכן הפונקציות $f(x)$ ו-$g(x)$ שוות אחת לשניה אבל מוזזות אחת ביחס לשניה, כמוראה בתרשים:



איור 7.2: הפונקציות $f(x)$ ו-$g(x)=f(x+1)$ מתרגיל 1.8.

7.2 פתרונות לפרק 2

פתרון לשאלה 2.1

1. הגבול של המכנה הוא $\lim_{x\to 1} = 4^2$ ואילו הגבול של המונה הוא $\lim_{x\to 1} 3$. מאריתמטיקה של גבולות נקבל שהגבול של הפונקציה הוא $3/16$.
2. זהו בדיוק הסעיף הקודם בשינוי אחד - $f(1)$ שונה. מאחר והגבול בנקודה תלוי בערכי $f(x)$ סביב הנקודה אבל לא בנקודה עצמה, שינוי זה לא משפיע על הגבול וגם כאן הגבול הוא $3/16$.
3. הגבול של המונה הוא $x^2+3 \xrightarrow[x\to 1]{} 4$ והגבול של המכנה הוא $x^2+2 \xrightarrow[x\to 1]{} 3 \neq 0$, לכן מאריתמטיקה של גבולות, הגבול של הפונקציה הוא $4/3$.
4. הגבול של המכנה הוא $x^2+4 \xrightarrow[x\to 0]{} 4 \neq 0$ והגבול של המונה הוא $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1-1=0$. לכן הגבול של הפונקציה הוא גם כן 0.
5. מתקיים $x^2-6x+5=(x-5)(x-1)$, לכן המכנה שואף ל-0 כאשר $x\to 5$ ולא ניתן להשתמש באריתמטיקה של גבולות. בשביל לפשט את הביטוי שבמונה ולהיפטר מהשורש, נכפול מונה ומכנה ב-$\sqrt{x-1}+2$ ונקבל

$$\frac{(\sqrt{x-1}-2)(\sqrt{x-1}+2)}{(x-5)(x-1)(\sqrt{x-1}+2)} = \frac{x-1-4}{(x-5)(x-1)(\sqrt{x-1}+2)}$$

אחרי צמצום $(x-5)$ מהמונה והמכנה נקבל שהמוונה שואף ל-1 ואילו המכנה שואף ל-$\lim_{x\to 5}(x-1)(\sqrt{x-1}+2) = 4\cdot(2+2) = 16$ ולכן הגבול של הפונקציה הינו $1/16$.

פתרון לשאלה 2.2

1. מתקיים $\sqrt{x^2-25} = \sqrt{x-5}\sqrt{x+5}$ לכן $\frac{x-5}{\sqrt{x^2-25}} = \frac{\sqrt{x-5}}{\sqrt{x+5}}$. בגבול $x\to 5^+$ המונה שואף ל-0 והמכנה שואף ל-$\sqrt{10}$ ולכן הגבול כולו הוא 0.
2. מאחר והפונקציה מחולקת לתחומים, כדי לחשב את הגבול ב-2 נחשב את הגבולות החד צדדיים. מתקיים

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} x/2+1/x = 1.5$$

וכן

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x^2-2.5 = 1.5$$

שני הגבולות החד צדדיים שווים ולכן $\lim_{x\to 2} f(x) = 1.5$.

פתרון לשאלה 2.3

תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בתחום $(-\infty, a)$ כלשהו ויהי $L \in \mathbb{R}$. נאמר שהגבול של הפונקציה כאשר x שואף למינוס אינסוף הוא L אם לכל $\epsilon > 0$ קיים M כך שאם $x < M$ אז $|f(x) - L| < \epsilon$ ונרשום $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ או $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} L$.

פתרון לשאלה 2.4

1. נוציא מהמונה ומהכנה גורם משותף x: $\frac{4x-1}{2x+3} = \frac{4-1/x}{2+3/x}$. המונה שואף ל-4 והמכנה שואף ל-2 (שניהם מאחר ו-$1/x \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$), ולכן הגבול הוא 2.
2. נוציא מהמונה והמכנה גורם משותף x^2: $\frac{3x^2-22x+7.5}{6x^2+10x} = \frac{3-22/x+7.5/x^2}{6+10/x}$. כמו בסעיף הקודם, כל ביטוי שבו מחלקים ב-x שואף ל-0 ולכן הגבול כולו הוא $3/6 = 1/2$.
3. בהתאם להנחיה, נכפול ונחלק את הפונקציה בביטוי הצמוד $\sqrt{x^2+x} + x$:
$$\sqrt{x^2+x} - x = \frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x} = \frac{x}{x(\sqrt{1+1/x}+1)}$$
נצמצם את ה-x ונקבל שהגבול הינו $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+1/x}+1} = \frac{1}{2}$.

פתרון לשאלה 2.5

יהיו $f(x), g(x)$ פונקציות המוגדרות בסביבת הנקודה x_0 ונניח כי $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$. מתקיים:

1. $\lim_{x\to x_0} (f+g)(x) = -\infty$.
2. $\lim_{x\to x_0} (f\cdot g)(x) = \infty$.
3. אם $C > 1$ אזי $\lim_{x\to x_0} C^{f(x)} = 0$.
4. אם $0 < C < 1$ אזי $\lim_{x\to x_0} C^{f(x)} = \infty$.
5. אם $C > 0$ אזי $\lim_{x\to x_0} |f(x)|^C = \infty$.

בשביל לחשב את הגבול ללא ערך מוחלט, $\lim_{x\to x_0} (|)f(x))^C$, צריך להוסיף הנחות לגבי C. למשל אם $C \in \mathbb{N}$ זוגי, הגבול הוא ∞ ואם $C \in \mathbb{N}$ אי זוגי הגבול הוא $-\infty$. לעומת זאת, אם C לא שלם, ייתכן והפונקציה כלל לא מוגדרת. למשל עבור $C = 1/2$, הגבול לא מוגדר כי הפונקציה לא מוגדרת (שורש של מספר שלילי).

פתרון לשאלה 2.6

1. מתקיים $8x^2-2x-1=(4x+1)(2x-1)$ וכן $4x^2-8x+3=(2x-1)(2x-3)$. נצמצם $2x-1$ מהמונה והמכנה ונקבל גבול שניתן לחשב באמצעות אריתמטיקה של גבולות: $\lim_{x\to 1/2}\frac{4x+1}{2x-3}=-\frac{3}{2}$.

2. בכדי להיפטר מהשורש, נכפול מונה ומכנה ב-$\sqrt{x+1}+1$:
$$\frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)}=\frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1}+1)}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}$$
והגבול כאשר $x\to 0$ הוא $1/2$.

3. הגבול לא קיים. כאשר $x\to 1^+$ המכנה שואף ל-0 ושלילי, לכן מתקבלים ערכים גדולים מאוד ושואפים למינוס אינסוף. כאשר $x\to 1^-$, המכנה שואף ל-0 וחיובי, ולכן מתקבלים ערכים שליליים מאוד ושואפים לאינסוף. מאחר והגבולות החד-צדדיים שונים, הגבול לא קיים.

4. בדומה לסעיף הקודם, כאשר $x\to 3^+$ הביטוי $\frac{1}{x-3}$ שואף לאינסוף ולכן גם $2^{\frac{1}{x-3}}\xrightarrow[x\to 3^+]{}\infty$. לעומת זאת, כאשר $x\to 3^-$ הביטוי $\frac{1}{x-3}$ שואף למינוס אינסוף ולכן $2^{\frac{1}{x-3}}\xrightarrow[x\to 3^-]{}0$.

פתרון לשאלה 2.7

בנקודה $x=1$ יש לפונקציה אסימפטוטה אנכית כי $\lim_{x\to 1^+}f(x)=\infty$ וכן $\lim_{x\to 1^-}f(x)=-\infty$.

מתקיים $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{1-1/x}=2$ ולכן לפונקציה אסימפטוטה אופקית ב-$\pm\infty$ וערכה 2.

פתרון לשאלה 2.8

בכל הסעיפים המטרה היא להביא את הפונקציה לצורה של הגבול של אוילר ולהשתמש בו.

1. $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{r}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1-\frac{r}{x}\right)^{-x/r}\right)^{(-r)}=e^{-r}$, שכן החלק האדום מתאים לגבול אוילר ושואף ל-e והחזקה $-r$ מתווספת לפי אריתמטיקה של גבולות.

2. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{r}{x}\right)^{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{r}{x}\right)^{x/r}\right)^{xr}$. גם כאן החלק האדום שואף ל-e ואילו החלק הכחול שואף ל$\pm\infty$ בהתאם לסימן של r. כאשר $r>0$ הגבול הוא אינסוף וכאשר $r<0$ הגבול הוא 0. כאשר $r=0$ הפונקציה המקורית היא בעצם $1^{x^2}=1$ (שימו לב שהפעם בסיס החזקה הוא ממש 1 ולא שואף ל-1) ולכן הגבול הוא 1 כי הפונקציה כלל לא תלויה ב-x.

3. מתקיים $\frac{\ln(x+2)-\ln(2)}{x}=\frac{1}{x}\ln(1+\frac{x}{2})=\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)^{1/x}$. נתמקד בביטוי המופיע בתוך ה-ln. $\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{1/x}=\lim_{x\to 0}\left(\left(1+\frac{x}{2}\right)^{2/x}\right)^{1/2}$ גבול זה שואף ל-$e^{1/2}$ והגבול המקורי שואף ל-$1/2$ לפי משפט 2.2.

4. קל לראות שהגבול של הביטוי $\frac{x^2+2x+1}{x}$ הוא ∞ ולכן מקבלים גבול מהצורה ∞^∞, כך שהגבול כולו הוא לא מהצורה של גבול אוילר ושווה לאינסוף.

פתרון לשאלה 2.9

מתקיים $\lim\limits_{x\to 0} x^2+5x = 0$ ואילו $\lim\limits_{x\to 0} 2x+3 = 3$ לכן הגבול של ההרכבה הינו $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+5x}{2x+3}=0$.

פתרון לשאלה 2.10

גם הגבול של המונה וגם הגבול של המכנה הם 0 כי בשניהם מתבצע חיסור בין שני שורשים ששואפים לאותו מספר כאשר $x\to 2$. לכן נכפול את המונה והמכנה בצמוד של כל אחד מהם, כך ניפטר מהשורש ונישאר עם ביטויים שלא שואפים ל-0:

$$\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{4x+1}-\sqrt{5x-1}}\cdot\frac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{5x-1}}{\sqrt{4x+1}+\sqrt{5x-1}}\cdot\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}}=\frac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{5x-1}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}}\cdot\frac{-2(x-2)}{-(x-2)}$$

החלק הבעייתי, $(x-2)$ מצטמצם ונשארים עם 2 כפול הגבול $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{5x-1}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}}=\frac{3+3}{2+2}=\frac{3}{2}$. לכן הגבול המקורי הינו 3.

פתרון לשאלה 2.11

נשים לב ש-$x=1$ מאפס גם את המונה וגם את המכנה, לכן לא ניתן לחשב את הגבול באמצעות אריתמטיקה של גבולות. מצד שני, מאחר ו-$x=1$ מאפס כל אחד מהביטויים, הרי שניתן לרשום אותם בתור $(x-1)(ax^2+bx+c)$. נחשב למה שווים a,b,c בכל אחד מהמקרים:

עבור המונה, $x^3-2x^2-x+2=(x-1)(ax^2+bx+c)=ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c$. כדי שהשיוויון יתקיים תמיד, נדרש שהמקדמים של שני הפולינומים יהיו זהים, כלומר $a=1$ (המקדם של x^3), $c=-2$ (המקדם החופשי) ולכן $b=-1$. כלומר המונה הינו $(x-1)(x^2-x-2)=(x-1)(x-2)(x+1)$. באותה צורה, נמצא שהמכנה הינו $(x-1)(x-2)(x+3)$. לכן הגבול המבוקש הינו

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+3)}=\frac{1}{2}$$

פתרון לשאלה 2.12

כאשר $x\to 3^+$ מתקיים $3-x<0$ ולכן $|3-x|=x-3$. כמו כן, $x^2-9=(x-3)(x+3)$ ולכן

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{\sqrt{x^2-9}}{|3-x|}=\lim_{x\to 3^+}\frac{\sqrt{(x-3)(x+3)}}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-3}}$$

המונה שואף למספר חיובי ואילו המכנה שואף ל-0 אבל מהכיוון החיובי, לכן המנה שואפת ל-∞.

7.3 פתרונות לפרק 3

פתרון לשאלה 3.1

1. הפונקציה רציונלית הנתונה בשאלה רציפה בכל תחום הגדרתה, לכן נקודות אי הרציפות היחידות היוכלות להיות הן כאשר המכנה מתאפס או כאשר עוברים בין התחומים (כלומר ב-$x = 1$). בתרגיל 2.1 מצאנו כי $\lim\limits_{x\to1}\frac{2x^2+x}{(x+3)^2} = 3/16 \neq f(1)$. לכן $x = 1$ היא נקודת אי רציפות סליקה.

   המכנה לא מוגדר עבור $x = -3$ ושם מתקיים $\lim\limits_{x\to-3} = \infty$ כי המונה שואף למספר חיובי והמכה שואף לאפס ותמיד חיובי. זו נקודת אי רציפות מסוג שני.

2. בכל תחום זו פונקציה רציונלית ולכן רציפה בתחום הגדרתה. אי רציפות יכולה להתרחש רק במעבר בין התחומים, שם גם המכנה מתאפס. בדוגמא 2.2 ראינו כי הגבול של הפונקציה ב-$x = 1$ הוא 2, וזה גם ערך הפונקציה $f(2)$. לכן הפונקציה רציפה בכל תחום הגדרתה.

3. נקודת אי הרציפות היחידה היכולה להיות היא $x = 2$ במעבר בין התחומים. אמנם x מופיע במכנה והביטוי $1/x$ לא מוגדר עבור $x = 0$, אבל הענף התחתון בהגדרת הפונקציה רלוונטי רק ל-$x > 2$ לכן אין בעיה להציב $x = 0$: $f(0) = -2.5$.

   בתרגיל 2.2 ראינו כי הגבול ב-$x = 2$ הינו 1.5 וזהו גם ערך הפונקציה, לכן הפונקציה רציפה לכל x.

4. הפונקציה מוגדרת לכל $x \geq -1$ פרט ל-$x = 0$ שם המכנה מתאפס. מתקיים $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 2$ לפי דוגמא 2.5. הגבול קיים וסופי ולכן זו נקודת אי רציפות סליקה.

פתרון לשאלה 3.2

המשפט לא נכון במקרה כזה ונדרשת רציפות בכל הקטע הסגור. דוגמא נגדית: נגדיר $f(x) = 1$ לכל $x \in (0,1]$ ו-$f(0) = 0$. הפונקציה רציפה בקטע הפתוחר $(0,1)$ ומתקיים $f(0) < 1/2 < f(1)$ אבל אין $x \in [0,1]$ כך ש-$f(x) = 1/2$.

פתרון לשאלה 3.3

הרעיון של ההוכחה הוא שפולינום ממעלה אי זוגית (כמו x^3) שואף לאינסוף כאשר $x \to \infty$ ולמינוס אינסוף כאשר $x \to -\infty$ ולכן חייב לעבור דרך ה-0 בדרך. כדי להשתמש במשפט ערך הביניים, צריך לבנות את הקטע המתאים בצורה מדוייקת, וזה נעשה בהוכחה הבאה:

נתבונן בפולינום $f(x) = a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ כאשר n אי זוגי, ו-$a_0,\ldots,a_n \in \mathbb{R}$ קבועים. נניח כי $a_n > 0$. הפתרון (כמעט) זהה אם $a_n < 0$.

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} x^n(a_n + a_{n-1}/x + \cdots + a_0/x^n) = \infty$ שכן הסוגריים שואפים ל-a_n ואילו $x^n \to \infty$. לכן קיים b כך שלכל $x > b$ מתקיים $f(x) > 1$.

באותה צורה $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ ולכן קיים a כך שלכל $x < a$ מתקיים $f(x) < -1$.

נתבונן בקטע $[a-1, b+1]$. מהאופן בו נבחרו a, b מתקיים $f(a-1) < -1 < 0 < 1 < f(b+1)$ והפונקציה היא פולינום לכן רציפה בכל $\mathbb{R}$, לכן קיים $c \in [a-1, b+1]$ כך ש-$f(c) = 0$ לפי משפט ערך הביניים.

פתרון לשאלה 3.4

בגלל ש-$\lim_{x\to 0^+} 1/x = \infty$, בכל קטע הכולל את 0 או ש-0 היא נקודת קצה שלו מהצורה $(0,b)$ אין מקסימום. באותה צורה, בכל קטע הכולל את 0 או מהצורה $(a,0)$ אין מינימום. בנוסף, הפונקציה יורדת לכל x בתחום הגדרתה, לכן בכל קטע פתוח אין לה או מקסימום או מינימום (בהתאם לקצה הפתוח).

לכן: בקטע $[0,1]$ לפונקציה יש מינימום (1) אבל אין מקסימום והיא ממילא לא מוגדרת ב-$x=0$. בקטע $(0,1)$ אין מקסימום מאותה סיבה ואין מינימום כי הפונקציה יורדת ומתקבלים ערכים קטנים יותר ככל שמתקרבים ל-1^-. בקטע $[-1,1]$ אין מקסימום ואין מינימום ובקטע $(1,3]$ יש מינימום ($x=3$) ואין מקסימום. רק בקטע $[1,2]$ יש מקסימום ומינימום שכן זה קטע סגור שבו הפונקציה רציפה. המקסימום מתקבל ב-$x=1$ והמינימום ב-$x=2$.

פתרון לשאלה 3.5

הפונקציה מוגדרת בכל תחום ולכן והיא הרכבה של פונקציות אלמנטריות שם, לכן היא רציפה בכל תחום בנפרד. נקודות אי הרציפות היחידות שיכולות להיות הן $x=0,9$, ובכל אחת מהן נחשב את הגבול ונדרוש שיהיה שווה לערך בנקודה.

מתקיים $\lim_{x\to 0^+} f(x) = b-6 = f(0)$. בנוסף, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$ ולכן הפונקציה רציפה בנקודה $x=0$ רק אם $b=6$.

באופן דומה, $\lim_{x\to 9^-} f(x) = 9a = f(9)$. בנוסף,

$$\lim_{x\to 9^+} f(x) = \lim_{x\to 9^+} \frac{(x-9)(x+1)(3+\sqrt{x})}{9-x} = -60.$$

לכן $a=-60/9$.

פתרון לשאלה 3.6

בשני המקרים נחשב את הגבולות החד צדדיים ב-$x=2$ ונדרוש שיוויון.

1. מתקיים $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 8$ וכן $f(2) = \lim_{x\to 2^-} = 2^k$ לכן הפונקציה רציפה ב-$x=2$ רק כאשר $2^k=8$ כלומר $k=3$.

2. מתקיים $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 3$ וכן $f(2) = \lim_{x\to 2^-} = 2+k$, לכן הפונקציה רציפה ב-$x=2$ רק כאשר $k=1$.

פתרון לשאלה 3.7

בכל הסעיפים הפונקציה המוגדרת על ידי האגף השמאלי $f(x)$ היא פונקציה רציפה (פולינום) ולכן רציפה. כדי להוכיח שקיים פתרון למשוואה $f(x)=0$ מספיק למצוא שני מספרים a ו-b כך ש-$f(a)>0$ ו-$f(b)<0$.

1. $f(1)=5>0>f(-1)=-1$ לכן קיים פתרון בקטע $(-1,1)$.

2. $f(0)=-6<0<f(-1)=1$ לכן קיים פתרון בקטע $(-1,0)$.

3. $f(0)=-5<0<f(2)=19$ לכן קיים פתרון בקטע $(0,2)$.

פתרון לשאלה 3.8

כדי שלפונקציה לא תהיה נקודת שבת אסור שהיא תהיה רציפה (אחרת נסתור את משפט נקודת השבת של בראוור) והדרך הכי טובה לעשות זאת זה להגדיר פונקציה רציפה כלשהי ולשנות את הערך שלה במקום בו אמורה להיות נקודת השבת ובכך להרוס את הרציפות.

למשל: $f(x) = \begin{cases} 3, & x \in [2,4] \setminus \{3\}, \\ 4, & x = 3. \end{cases}$. לכל $x \neq 3$ מתקיים $f(x) = 3 \neq x$ ולכן זו לא נקודת שבת. בנוסף, $f(3) \neq 3$ ולכן אין לפונקציה נקודות שבת בקטע. בנקודה $x = 3$ יש אי רציפות סליקה ואם הפונקציה הייתה מוגדרת כמו שצריך כדי שתהיה רציפה, כלומר $f(3) = 3$, הייתה לה נקודת שבת.

7.4 פתרונות לפרק 4

פתרון לשאלה 4.1

נניח ש-$f(x)$ גזירה בנקודה x_0, ונסמן את נגזרתה בנקודה ב-$f'(x_0)$. מתקיים

$$\lim_{x\to x_0} f(x)-f(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)=f'(x_0)\cdot 0=0$$

כמסקנה, מאריתמטיקה של גבולות נקבל ש- $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, כלומר גזירות ב-$x_0$ גוררת רציפות ב-x_0.

כפי שהודגם בטקסט, ההפך אינו נכון: $|x|$ רציפה ב-$x_0=0$ אך לא גזירה שם.

פתרון לשאלה 4.2

1. נחשב לפי כלל השרשרת:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+\ln(x)}}\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

2. נשתמש בזהות $f(x)=x^x=e^{x\ln(x)}$. כעת אפשר לגזור לפי כלל השרשרת:

$$f'(x)=e^{x\ln(x)}\left(1\cdot\ln(x)+x\cdot\frac{1}{x}\right)=x^x(\ln(x)+1)$$

3. מתקיים $f(x)=3x^{-1/3}-4x^{-5/2}$ כלומר זו נגזרת פשוטה של איקס בחזקת מספר: $f'(x)=3\cdot\frac{-1}{3}x^{-4/3}-4\cdot\frac{-5}{2}x^{-7/2}=-x^{-4/3}+10x^{-7/2}$.

4. $f'(x)=7(1+e^{-x})^6\cdot(-e^{-x})$.

5. זו נגזרת של מכפלה של שלוש פונקציות. בכל שלב נגזור אחת מהן ונכפול בשתי האחרות:

$$f'(x)=2xe^{3x}\ln(2x)+3e^{3x}x^2\ln(2x)+\frac{1}{x}x^2e^{3x}=e^{3x}\left((2+3x)x\ln(2x)+x\right)$$

6. נשתמש בזהות $f(x)=\exp\left((x^2+1)\ln(x)\right)$ ונגזור

$$f'(x)=\exp\left((x^2+1)\ln(x)\right)\left(2x\ln(x)+\frac{x^2+1}{x}\right)=x^{x^2+1}\left(2x\ln(x)+\frac{x^2+1}{x}\right)$$

פתרון לשאלה 4.3

תהי $f(x)$ פונקציה רציפה ב-$[a,b]$ וגזירה ב-(a,b) כך שמתקיים $f(a)=f(b)=0$. לפי משפט ויירשטראס, קיימים מקסימום ומינימום לפונקציה בתחום $[a,b]$. אם שניהם מתקבלים בקצוות אז המקסימום והמינימום הם 0 כלומר הפונקציה קבועה ולכן $f'(c)=0$ לכל $c\in(a,b)$.

נניח אם כך שהמקסימום (או המינימום, זה לא משנה) מתקבל בנקודה פנימית $c \in (a,b)$. לפי משפט פרמה, $f'(c) = 0$ כנדרש.

פתרון לשאלה 4.4

נניח ש-$f(x)$ היא פונקציה קבועה. אזי לכל x_0 מתקיים $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0$ שכן $f(x) = f(x_0)$.

בכיוון השני, נניח ש-$f'(x) = 0$ לכל x ונניח בשלילה שהפונקציה לא קבועה, כלומר קיימות שתי נקודות $a < b$ כך ש-$f(a) \neq f(b)$. לפי משפט לגרנז', קיימת נקודה $c \in (a,b)$ כך ש-$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \neq 0$, וזו סתירה. לכן, הפונקציה קבועה. שימו לב שהשתמשנו במשפט לגרנז' בתחום $[a,b]$ כי הפונקציה גזירה לכל x מהנתון ולכן גם רציפה.

פתרון לשאלה 4.5

1. זה גבול מהצורה ∞/∞ לכן ניתן להשתמש בכלל לופיטל (במידה וגבול מנת הנגזרות קיים):
$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2 - x + 3}{2x^2 - 7x + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{10x - 1}{4x - 7}$$
גם הגבול הזה הוא מהצורה ∞/∞ לכן נגזור שוב ונקבל את הגבול $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{10}{4} = 2.5$.
מאחר והגבול הזה קיים וסופי, לפי משפט לופיטל גם הגבול המקורי קיים ושווה ל-2.5.
הערה: אפשר לפתור את התרגיל (בקלות יותר) על ידי הוצאת החזקה הגדולה ביותר x^2 מהמונה והמכנה.

2. כמו בסעיף הקודם, נשתמש בלופיטל מספר פעמים מאחר וזה גבול מהצורה ∞/∞. נשים לב שהנגזרת של המכנה היא תמיד e^x ונקבל:
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{6x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{6}{e^x} = 0$$
באופן כללי, אקספוננט (וחזקות) שואפות יותר מהר לאינסוף מאשר פולינומים, לכן בגבולות מהצורה הזו מה שקובע הוא האקספוננט.

3. מתקיים $\lim\limits_{x\to 0^+} 1 + \ln(x) = -\infty$ וכן $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$. לכן הגבול הוא לא מהצורה של לופיטל ואריתמטיקה של גבולות אינסופיים מובילה לכך ש- $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1+\ln(x)}{x} = -\infty$.

4. זהו גבול מהצורה $\infty - \infty$. כדי להביא אותו לצורה של כלל לופיטל, אפשר לעשות מכנה משותף:
$$\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} = \frac{x - e^x + 1}{x(e^x - 1)}$$
עכשיו זהו גבול מהצורה $0/0$ ואפשר להפעיל את לופיטל פעמיים:
$$\lim_{x\to 0} \frac{x - e^x + 1}{x(e^x - 1)} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - e^x}{e^x - 1 + xe^x} = \lim_{x\to 0} \frac{-e^x}{e^x + xe^x + e^x} = -\frac{1}{2}$$

5. נרשום מחדש $x\ln(x)=\frac{\ln(x)}{1/x}$ כלומר כאשר $x\to 0^+$ זה גבול מהצורה $-\infty/\infty$. נחשב אותו באמצעות לופיטל:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x)}{1/x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/x^2}=0$$

באופן כללי, לאן היא פונקציה חלשה יותר מאשר חזקות ולכן בגבולות מהצורה הזו מה שקובע הוא הפולינום.

6. זהו גבול מהצורה 1^∞ וכדי לחשב אותו אפשר להשתמש באוילר או בלופיטל. לאור נושא הסעיף, נשתמש בלופיטל:

$$\lim_{x\to 2}(2x-3)^{\frac{1}{x-2}}=\lim_{x\to 2}\exp\left(\frac{1}{x-2}\ln(2x-3)\right)$$

נחשב את הגבול שבתוך ה-exp:

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\ln(2x-3)=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{2}{2x-3}}{1}=2$$

ולכן הגבול המקורי שווה ל-e^2.

פתרון לשאלה 4.6

מתקיים $f''(x_0)\geq 0$ אם ורק אם $-f''(x_0)\leq 0$ ומכאן מיידית נקבל שאם הפונקציה $f(x)$ קמורה בנקודה מסויימת אז הפונקציה $-f(x)$ קעורה שם (ולהפך).

פתרון לשאלה 4.7

בכל התרגילים נגזור את הפונקציה פעמיים ונקבע את תחומי הקמירות והקעירות בהתאם לסימן הנגזרת השנייה.

1. מתקיים $f''(x)=e^x>0$ ולכן הפונקציה קמורה בכל תחום הגדרתה.

2. מתקיים $f'(x)=1/x$ וכן $f''(x)=-1/x^2<0$ לכן הפונקציה קעורה בכל תחום הגדרתה.

3. מתקיים $f'(x)=\frac{3x^2(x^2+1)-2x(x^3)}{(x^2+1)}=\frac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2}$ ולכן

$$f''(x)=\frac{(4x^3+6x)(x^2+1)^2-2(x^2+1)\cdot 2x\cdot(x^4+3x^2)}{(x^2+1)^4}=\frac{2x(3-x^2)}{(x^2+1)^3}$$

המכנה תמיד חיובי והמונה מתאפס כאשר $x=0,\pm\sqrt{3}$. בדיקה ישירה מתי כל אחד מ-3 הנכפלים במונה חיובי ושלילי מראה שבתחומים $(-\infty,-\sqrt{3})$ ו-$(0,\sqrt{3})$ המונה חיובי ולכן $f''(x)>0$ (הפונקציה קמורה) ובתחומים $(-\sqrt{3},0)$ ו-$(\sqrt{3},\infty)$ הפונקציה קעורה שכן $f''(x)<0$. לסיכום, נקודות הפיתול הן הנקודות בהן הפונקציה עוברת מקמירות לקעירות, כלומר שלושת הנקודות $\pm\sqrt{3},0$.

4. נגזור פעמיים: $f'(x)=\ln(x)+x\cdot 1/x=\ln(x)+1$ ולכן $f''(x)=1/x>0$, כך שהפונקציה קמורה בכל תחום הגדרתה.

פתרון לשאלה 4.8

תהי $f(x)$ קמורה חזק בקטע $[a,b]$. לכן יש לה בדיוק נקודת מינימום אחת בקטע $[a,b]$ ואחת מבין הנקודות $x=a$ ו-$x=b$ היא נקודת המקסימום המוחלט של הפונקציה בקטע.

ניתן לראות זאת מכך שאם $f(x)$ קמורה חזק אז $-f(x)$ קעורה חזק, וכל נקודת מקסימום (מינימום) של $f(x)$ היא נקודת מינימום (מקסימום) של $-f(x)$.

פתרון לשאלה 4.9

תהי $f(x)$ פונקציה קעורה חזק בקטע סגור $[a,b]$ ורציפה. לכן לפונקציה יש נקודת מקסימום אחת לפחות בקטע (משפט ויירשטראס). נניח בשלילה שיש שתי נקודות $c<d$ שהן נקודות מקסימום של הפונקציה. כמו כן, נניח כי $f(d)\geq f(c)$. הפונקציה קעורה חזק, לכן לכל $t\in(0,1)$ מתקיים $f(tc+(1-t)d)>tf(c)+(1-t)f(d)\geq f(c)$.

הנקודה c היא נקודת מקסימום של הפונקציה, לכן קיימת סביבה שלה כך שלכל x בה מתקיים $f(x)\leq f(c)$. מצד שני, עבור t קרוב מספיק ל-1, הנקודה $tc+(1-t)d$ נמצאת בסביבה הזו ומקיימום $f(tc+(1-t)d)>f(c)$, וזו סתירה.

אינטואיטיבית, ההוכחה מתבססת על כך שהפונקציה קעורה חזק ולכן נמצאת מעל המיתר שמחבר את $f(c)$ עם $f(d)$, לכן מהנקודה c הפונקציה חייבת לעלות עוד ולא יכולה להיות קטנה מ-$f(c)$ שם.

פתרון לשאלה 4.10

נניח ש-$f(x)$ היא פונקציה קמורה וגזירה פעמיים ויהיה $p\in\mathbb{R}$. נסמן $g(x)=px-f(x)$. מתקיים $g'(x)=p-f'(x)$ ולכן $g''(x)=-f''(x)$. מאחר ש-$f(x)$ קמורה מתקיים $f''(x)\geq 0$ ולכן $g''(x)\leq 0$, כלומר $g(x)$ פונקציה קעורה.

פתרון לשאלה 4.11

1. לפי כלל השרשרת $f'(x)=20(2x-7)^{19}\cdot 2=40(2x-7)^{19}$.
2. באותה צורה $f'(x)=10(\sqrt{x}+1/\sqrt{x})^9\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}\right)$ שכן $1/\sqrt{x}=x^{-1/2}$.
3. לפי נגזרת של $\ln$: $f'(x)=\frac{-2x}{a^2-x^2}$.
4. מתקיים $(\sqrt{x^2-9})'=\frac{x}{\sqrt{x^2-9}}$ ולכן

$$f'(x)=\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2-9}}+\frac{\sqrt{x^2-9}}{2}-\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2-9}}}{x+\sqrt{x^2-9}}=\frac{2x^2-11}{2\sqrt{x^2-9}}$$

5. מאחר ו-$x\sqrt{x}=x^{1.5}$ ניתן לרשום את הפונקציה בתור $f(x)=\frac{x^4-x^2+2}{x^{1.5}}=x^{2.5}-x^{0.5}+2x^{-1.5}$ לכן $f'(x)=2.5x^{1.5}-0.5x^{-0.5}-3x^{-2.5}$.
6. לפי כלל השרשרת $f'(x)=\frac{1}{3}(x+\sqrt{x})^{-2/3}(1+\frac{1}{2\sqrt{x}})$
7. לפי נגזרת של מנה

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{e^{3x^2+1}\left((2x-3)^5+10x(2x-3)^4\right)-6x\cdot x(2x-3)^5e^{3x^2+1}}{(e^{3x^2+1})^2}\\&=\frac{-3(2x-3)^4\left(4x^3-6x^2-4x+1\right)}{e^{3x^2+1}}\end{aligned}$$

פתרון לשאלה 4.12

בכל הסעיפים נגזור את הפונקציה ונבדוק מתי הנגזרת חיובית (הפונקציה עולה) או שלילית (הפונקציה יורדת). הנקודות בהן הנגזרת מתאפסת והפונקציה עוברת מעליה לירידה (או להפך) הן נקודות הקיצון. שימו לב שלא מספיק לבדוק רק את התאפסות הנגזרת! אם הפונקציה מתנהגת באופן זהה בשני הצדדים של נקודת ההתאפסות (למשל עולה לפני ועולה אחרי) היא גם עולה בנקודה עצמה וזו אינה נקודת קיצון.

בנוסף, נתייחס בכל תשובה גם לתחום ההגדרה של הפונקציה.

1. ניתן לגזור את הפונקציה כמו שהיא או לנסות לפשט אותה מעט:

$$f(x)=\frac{x^2+4x+4}{x+3}=\frac{(x+2)^2}{x+3}$$

לכן $f'(x)=\frac{2(x+2)(x+3)-(x+2)^2}{(x+3)^2}=\frac{(x+2)(x+4)}{(x+3)^2}$. רק המונה משפיע על הסימן של הנגזרת, ולכן הפונקציה עולה כאשר $x<-4$ וכן $x>-2$ ויורדת בתחום $(-4,-2)\setminus\{-3\}$. הנקודה $x=-4$ היא נקודת מקסימום מקומי שכן הפונקציה עוברת שם מעליה לירידה והנקודה $x=-2$ היא נקודת מינימום מקומי כי הפונקציה עוברת שם מירידה לעליה.

2. $f'(x)=-3x^2+18x+81=-3(x-9)(x+3)$. הנגזרת חיובית בתחום $(-3,9)$ ושם הפונקציה עולה, שלילית בתחומים $(-\infty,-3)$, $(9,\infty)$ שם הפונקציה יורדת וקיימות לה שתי נקודות קיצון: $x=-3$ היא מינימום מקומי (עוברת מירידה לעליה) ו-$x=9$ מקסימום מקומי (עוברת מעליה לירידה).

3. $f'(x)=4x^3-4x=4x(x-1)(x+1)$. הנגזרת חיובית בתחומים $(-1,0)$, $(1,\infty)$ ושלילית בתחומים $(-\infty,-1)$, $(0,1)$. לכן הנקודה $x=0$ היא מקסימום מקומי (הפונקציה עוברת מעליה לירידה) והנקודות $x=\pm1$ הן מינימום מקומי (הפונקציה עוברת מירידה לעליה).

4. $f'(x)=x^4-2x^2+1=(x^2-1)^2\geq0$. הנגזרת תמיד אי שלילית ומתאפסת רק בנקודות $x=\pm1$. לכן הפונקציה עולה לכל x ואין לה נקודות קיצון.

5. $f'(x)=\frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}$. המונה הינו $1-x^2$ והוא קובע את סימן הנגזרת, לכן הנגזרת חיובית כאשר $x\in(-1,1)$ ושלילית אחרת. מכאן שהפונקציה יורדת בתחומים $(-\infty,-1)$ ו-$(1,\infty)$, עולה בתחום $(-1,1)$ והנקודות $x=\pm1$ הן נקודות קיצון: $x=-1$ היא נקודת מינימום ו-$x=1$ היא נקודת מקסימום.

6. $f'(x)=e^{-3x}-3xe^{-3x}=e^{-3x}(1-3x)$. האקספוננט חיובי תמיד לכן הנגזרת חיובית כאשר $x<1/3$ ושלילית כאשר $x>1/3$. הפונקציה עולה בתחום $(-\infty,1/3)$, מגיעה למקסימום ב-$x=1/3$ ויורדת בתחום $(1/3,\infty)$.

7. $f'(x)=\frac{-x^2-2x(1-x)}{x^4}=\frac{x(x-2)}{x^4}$. המכנה תמיד חיובי ואילו המונה חיובי כאשר $x>2$ או $x<0$ ושלילי בתחום $(0,2)$. לכן הפונקציה עולה בתחום $(-\infty,0)$, יורדת בתחום $(0,2)$ ועולה בתחום $(2,\infty)$. הנקודה $x=2$ היא נקודת מינימום ובנקודה $x=0$ הפונקציה לא מוגדרת.

8. $f'(x)=2-2x^{-1/3}$. הנגזרת מתאפסת כאשר $x=1$, חיובית כאשר $x>1$ או $x<0$ ושלילית אחרת. לכן הפונקציה עולה בתחום $(-\infty,0)$ ובתחום $(1,\infty)$ ויורדת

בתחום $(0,1)$. הנקודה $x=1$ היא מינימום מקומי והנקודה $x=0$ היא מקסימום מקומי. שימו לב שבנקודה זו הפונקציה אינה גזירה (הגבול של הנגזרת לא קיים), אבל היא בכל זאת נקודת קיצון כי הפונקציה עוברת מעליה לירידה בנקודה זו.

9. אפשר לחשב לפי נגזרת של מכפלה או לפתוח סוגריים: $f(x)=-x^3(x^2-4x+4)=-x^5+4x^4-4x^3$ ולכן $f'(x)=-5x^4+16x^3-12x^2=x^2(-5x^2+16x-12)$. הגורם $x^2\geq 0$ ומתאפס רק ב-$x=0$, ולכן פרט לנקודה $x=0$ לא משפיע על הסימן של הנגזרת. הגורם השני חיובי כאשר $6/5<x<2$ ושלילי אחרת. לכן הפונקציה עולה בתחום $(6/5,2)$ ויורדת כאשר $x>2$ או $6/5>$. הנקודה $x=2$ היא נקודת מקסימום מקומי והנקודה $x=6/5$ היא נקודת מינימום מקומי והנקודה $x=0$ היא לא נקודת קיצון, למרות שהנגזרת מתאפסת שם.

10. מתקיים $f'(x)=\frac{\ln(x)-1}{\ln^2(x)}$. המכנה חיובי בכל תחום ההגדרה ואילו המונה חיובי אם ורק אם $\ln(x)>1$ כלומר $x>e$. לכן הפונקציה עולה ב-(e,∞) ויורדת ב-$(0,e)\setminus 1$. הנקודה $x=e$ היא נקודת מינימום של הפונקציה.

פתרון לשאלה 4.13

נוכיח ישירות על ידי גזירה והצבה בנוסחא. $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$ לכן $f'(x)=-\frac{2x}{(x^2-1)^2}$ וכן $f''(x)=-\frac{2(x^2-1)^2-2(x^2-1)\cdot(2x)^2}{(x^2-1)^4}=\frac{6x^2+2}{(x^2-1)^3}$ נציב את הביטויים שמצאנו באגף שמאל ונקבל

$$2\left(-\frac{2x}{(x^2-1)^2}\right)^2-\left(\frac{1}{x^2-1}\right)\cdot\left(\frac{6x^2+2}{(x^2-1)^3}\right)=\frac{2}{(x^2-1)^3}$$

קיבלנו בדיוק את $2f^3(x)$ כלומר הטענה נכונה.

הערה: להציב את כל הביטויים בשני אגפי המשוואה, לפשט ולהגיע ל-$0=0$ היא לא דרך הוכחה קבילה שכן היא מסתמכת על כך שהמשוואה נכונה ולא מוכיחה אותה. כאן, חישבנו בנפרד את אגף שמאל והראנו שהוא שווה בדיוק לאגף ימין, מבלי להציב במשוואה.

פתרון לשאלה 4.14

נשתמש בכלל השרשרת:

$$g'(x)=\frac{9-x^2-x(-2x)}{(9-x^2)^2}-f'\left(\frac{2x^2}{3}\right)\cdot\frac{4x}{3}=\frac{9+x^2}{(9-x^2)^2}-\frac{4x}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{2x^2}{3})^2}}+\ln(\frac{2x^2}{3})\right)$$

הערה: באחת השנים שאלה זו ניתנה במבחן וסטודנטים רבים ניסו על סמך הנוסחא של $f'(x)$ לחשב מפורשות את $f(x)$ באמצעות אינטגרל (ראו פרק 5). אבל חישוב הפונקציה המקורית $f(x)$ על סמך הנגזרת שלה מאוד מסובך במקרה הזה וממילא לא נחוץ כי השאלה עוסקת בנגזרת של הפונקציה $g(x)$ ולשם כך מספיק לדעת את $f'(x)$ ולהשתמש נכון בכלל השרשרת. אין צורך בידיעת $f(x)$.

פתרון לשאלה 4.15

1. המונה והמכנה שואפים לאינסוף לכן ניתן לחשב את הגבול באמצעות כלל לופיטל:
$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{2x}=0$

2. הגבול של $\ln(x)$ כאשר $x \to 1^-$ הוא 0 והגבול של $\ln(1-x)$ הוא $-\infty$, כך שזה גבול מהצורה $0 \cdot \infty$. נשנה את הביטוי לגבול מהצורה ∞/∞ ונחשב באמצעות לופיטל:

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{\ln(1-x)}{1/\ln(x)} = \lim_{x \to 1^-} \frac{-1/(1-x)}{-1\ln^{-2}(x)/x} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x\ln^2(x)}{(1-x)}$$

גם זה גבול מהצורה $\frac{\infty}{\infty}$ ולכן נפעיל את כלל לופיטל: $\cdots = \lim_{x \to 1^-} \frac{\ln^2(x)+2x\ln(x)}{-1} = 0$.

3. כמו בסעיף הקודם, ראשית נסדר את הביטוי כך שיהיה גבול מהצורה ∞/∞ ואז נחשב באמצעות כלל לופיטל:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x)}{x^{-n}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1/x}{-nx^{-n-1}} = \lim_{x \to 0^+} -\frac{x^n}{n} = 0$$

4. זהו גבול מהצורה 1^∞ ולכן כדי להשתמש בלופיטל ניעזר במשוואה 1.1 ונרשום רק את המעריך:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{1-x} = \lim_{x \to 1} \frac{1/x}{-1} = -1$$

לכן הגבול המקורי שווה ל-e^{-1}.

5. זה גבול מהצורה $\infty - \infty$ אז נסדר אותו ונפעיל את כלל לופיטל:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x\ln(x) - x + 1}{(x-1)\ln(x)} = \lim_{x \to 1} \frac{\ln(x) + 1 - 1}{\ln(x) + (x-1)/x} = \lim_{x \to 1} \frac{x\ln(x)}{x\ln(x) + x - 1}$$

נפעיל שוב את כלל לופיטל שכן זהו גבול מהצורה $0/0$:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln(x) + 1}{\ln(x) + 1 + 1} = \frac{1}{2}$$

ולכן גם הגבול המקורי קיים ושווה ל-$\frac{1}{2}$.

6. זה גבול מהצורה $0/0$ ואפשר לפתור אותו כמו שהוא באמצעות לופיטל. יחד עם זאת, מאחר ובמונה יש מכפלה של שתי פונקציות, חישוב ישיר יהיה מסורבל יותר. במקום זאת, נסים לב כי ניתן לפרק את הפונקציה הנתונה למכפלה של שתי פונקציות מאותה הצורה:

$$\frac{(e^x - 1)(e^{2x} - 1)}{x^2} = \frac{e^x - 1}{x} \cdot \frac{e^{2x} - 1}{x}$$

לכן, אם נדע את הערך של גבול של פונקציה מהצורה $\frac{e^{ax}-1}{x}$ (כאן $a = 1, 2$), **ואם כל גבול קיים**, אז ניתן יהיה לחשב את הגבול המקורי באמצעות אריתמטיקה של גבולות. מתקיים

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{ax} - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{ae^{ax}}{1} = a$$

ולכן הגבול המקורי שווה ל-$1 \cdot 2 = 2$.

7. ניתן לפרק את הפונקציה לסכום של שתי פונקציות: $\frac{x+\ln(x)}{x\ln(x)} = \frac{1}{\ln(x)} + \frac{1}{x}$. כאשר $x \to \infty$, כל גורם שואף בנפרד ל-0 ולכן גם הסכום שואף ל-0.

8. זה גבול מהצורה $0/0$ וניתן לחשב אותו באמצעות כלל לופיטל:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/3}-1-x/3}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{3}\cdot\frac{(1+x)^{-2/3}-1}{2x}=\lim_{x\to 0}-\frac{2}{9}\cdot\frac{(1+x)^{-5/3}}{2}=-\frac{1}{9}$$

9. זה גבול מהצורה 1^∞. כדי לחשב אותו נשתמש במשוואה 1.1 ונקבל:

$$\lim_{x\to 0}(e^x+3x)^{1/x}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}\ln(e^x+3x)}$$

נתמקד במעריך:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^x+3x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x+3}{e^x+3x}}{1}=4$$

ולכן הגבול המקורי שווה ל-e^4.

10. גם כאן נשתמש במשוואה 1.1 על מנת להימנע ממצב שבו x מופיע גם בבסיס החזקה וגם במעריך החזקה: $\ln(1/x)^x=\exp(x\ln(\ln(1/x)))$. נחשב את הגבול של המעריך:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\ln(1/x))}{1/x}=\lim_{y\to\infty}\frac{\ln(\ln(y))}{y}=\lim_{y\to\infty}\frac{\frac{1/y}{\ln(y)}}{1}=\lim_{y\to\infty}\frac{1}{y\ln(y)}=0$$

ולכן הגבול המקורי שווה ל-$e^0=1$. הסיבה שהחלפנו משתנה היא שאם מסמנים $y=1/x$ מקבלים נוסחא שיותר קל לגזור.

11. נשתמש בגבול של אוילר:

$$\lim_{x\to\infty}(1+2e^{-x})^{e^x+x}=\lim_{x\to\infty}(1+2e^{-x})^{(2e^{-x})^{-1}(2e^{-x})(e^x+x)}$$

החלק האדום הוא הגבול של אוילר ושואף ל-e כאשר $x\to\infty$. החלק הכחול הוא $2\frac{e^x+x}{e^x}$ ושואף ל-2. לכן הגבול כולו שואף ל-e^2.

12. אמנם אפשר לפתור את השאלה עם כלל לופיטל, אבל הרבה יותר פשוטה להוציא את החזקה הגבוהה ביותר מהמכנה:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{1+x^{-2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{\sqrt{1+x^{-2}}}=-1$$

הנקודה העדינה שיש לשים לב אליה (אחרת התשובה תצא 1) היא שכאן חשוב להקפיד לרשום $\sqrt{x^2}=|x|$, מאחר ופונקציית השורש תמיד מחזירה מספר חיובי ובגבול ערכי x הם שליליים, ולא נכון לרשום $\sqrt{x^2}=x$.

13. הגבול הזה הוא לא בעייתי ואפשר לפתור אותו באמצעות אריתמטיקה של גבולות סופיים. בסיס החזקה שואף ל-$1/3$ (למשל, באמצעות לופיטל או הוצאת החזקה הגבוהה ביותר מהמונה והמכנה) ואילו המעריך שואף ל-0, לכן הגבול הינו $(1/3)^0=1$.

14. אפשר לחשב את הגבול הזה באמצעות לופיטל (אחרי שמשתמשים במשוואה 1.1 כדי "להוריד" את החזקה למטה) או על ידי גבול אוילר:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x+4}\right)^{\frac{x-1}{4}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-7}{2x+4}\right)^{\frac{2x+4}{-7}\cdot\frac{-7}{2x+4}\cdot\frac{x-1}{4}}$$

החלק האדום הוא גבול אוילר ושואף ל-e והחלק הכחול שואף ל-$-7/8$ לכן ערכו של הגבול כולו הוא $e^{-7/8}$

15. ראשית נפשט את הביטוי:

$$\frac{3}{1-x^3}-\frac{2}{1-x^2}=\frac{3(1-x^2)-2(1-x^3)}{(1-x^2)(1-x^3)}=\frac{1-3x^2+2x^3}{1-x^2-x^3+x^5}$$

זו פונקציה רציונלית כאשר המונה והמכנה שואפים ל-0, לכן ניתן לחשב את הגבול באמצעות כלל לופיטל:

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-3x^2+2x^3}{1-x^2-x^3+x^5}=\lim_{x\to 1}\frac{-6x+6x^2}{-2x-3x^2+5x^4}=\lim_{x\to 1}\frac{6}{-3+15x^2}=\frac{1}{2}$$

כאשר לפני הפעלת כלל לופיטל בפעם השניה צמצמנו x אחד מהמונה ומהמכנה כדי לפשט את הביטוי.

פתרון לשאלה 4.16

הפונקציה רציפה ומתקיים $f(1)=4>-1=f(0)$ לכן קיימת נקודה $d\in(0,1)$ כך ש-$f(d)=0$. בנוסף, $f(2)=0$ לכן לפי משפט רול, קיימת נקודה $c\in(d,2)$ כך ש-$f'(c)=0$.

הטענה לא נכונה אם הפונקציה לא רציפה בקטע $[0,2]$. מהגזירות מתחייב שהיא רציפה בקטע $(0,2)$, אבל זה לא מספיק. למשל, נגדיר $f(x)=\begin{cases}-1, & x=0,\\ x+3, & 0<x<2,\\ 0, & x=2.\end{cases}$ מתקיים $f(0)=-1$, $f(1)=1+3=4$, $f(2)=0$ אבל בכל נקודה פנימית, $f'(x)=1\neq 0$.

פתרון לשאלה 4.17

נגדיר $f(x)=\ln(x^2+2x+0.5)-x$ ונחפש פתרונות של המשוואה $f(x)=0$.

1. מתקיים $f(0)=\ln(0.5)<0$, $f(1)=\ln(3.5)-1>0$ (כי $\ln(3.5)>\ln(e)=1$) ו-$f(10)=\ln(120.5)-10<0$. מאחר והפונקציה רציפה, קיים פתרון אחד לפחות בקטע $(0,1)$ ופתרון אחד לפחות בקטע $(1,10)$, ולכן קיימים לפחות שני פתרונות.
2. מתקיים $f'(x)=\frac{2x+2}{x^2+2x+0.5}-1$. נבדוק מתי הנגזרת מתאפסת: $f'(x)=0$ אם ורק אם $2x+2=x^2+2x+0.5$ דהיינו $x^2=1.5$. למשוואה הזו יש פתרון אחד בלבד בתחום $(0,10)$, כך שאם למשוואה $f(x)=0$ היו שלושה פתרונות, לפי משפט רול הנגזרת הייתה מתאפסת בין כל שני פתרונות כלומר לפחות פעמיים. אבל מאחר והנגזרת מתאפסת רק פעם אחת, יש לכל היותר שני פתרונות למשוואה $f(x)=0$.
3. לפי הסעיף הראשון למשוואה $f(x)=0$ יש לפחות שני פתרונות ולפי הסעיף השני יש לכל היותר שני פתרונות. לכן יש למשוואה הזו בדיוק שני פתרונות בקטע $[0,10]$.
4. נמצא את הפתרון בקטע $[0,1]$ על ידי שיטת החצייה. ראינו ש-$f(0)<0<f(1)$. נציב את אמצע הקטע: $f(0.5)=\ln(1.75)-0.5=0.0596>0$. לכן נחפש בתחום $[0,0.5]$ ונמשיך לחצות את הקטע בכל פעם:

$$f(0)<0<f(0.5)\qquad f(0.5[0+0.5]=0.25)=-0.189<0$$

$$f(0.25)<0<f(0.5)\qquad f(0.5[0.25+0.5]=0.375)=-0.0452<0$$

$f(0.375) < 0 < f(0.5) \qquad f(0.5[0.375 + 0.5] = 0.4375) = 0.01128 > 0$

$f(0.375) < 0 < f(0.4375) \qquad f(0.5[0.375{+}0.4375] = 0.40625) = -0.0159 < 0$

מכאן שהפתרון נמצא בתחום $[0.40625, 0.4375]$, לכן הספרה הראשונה אחרי הנקודה העשרונית היא בוודאות 4. נמשיך בתהליך עד שנמצא את הספרה השניה:

$f(0.40625) < 0 < f(0.4375) \qquad f(0.5[0.40625{+}0.4375] = 0.421875) = -0.002 < 0$

$f(0.421875) < 0 < f(0.4375) \qquad f(0.5[0.421875{+}0.4375] = 0.4296875) = 0.0004 > 0$

מכאן שהפתרון בוודאות נמצא בקטע $[0.421875, 0.4296875]$, ושתי הספרות הראשונות שלו הן 0.42.

פתרון לשאלה 4.18

בכל הסעיפים נפעל כמו בשאלה 4.17: נמצא תחום שבו הפונקציה מתאפסת (ולכן יש לפחות פתרון יחיד) אבל נראה שהנגזרת לעולם לא מתאפסת ולכן לא יתכנו שני פתרונות (כי אחרת לפי משפט רול הנגזרת מתאפסת).

1. נגדיר $f(x) = x^5/5 + x^3 + 2x - 6$. מתקיים $f(0) < 0 < f(2)$ לכן לפי משפט ערך הביניים יש לפחות פתרון אחד בקטע $[0, 2]$. מצד שני, $f'(x) = x^4 + 3x^2 + 2 = (x^2 + 1)(x^2 + 2) > 0$. הנגזרת לא מתאפסת באף נקודה ולכן יש לכל היותר פתרון אחד ולסיכום - ישנו פתרון יחיד למשוואה $f(x) = 0$.
2. נגדיר $f(x) = e^x - x^2 - 3$. גם כאן, $f(0) < 0 < f(2)$ לכן יש לפחות פתרון אחד בקטע $[0, 2]$. בנוסף, $f'(x) = e^x - 2x$.

   על מנת לראות שהנגזרת לא מתאפסת, נמצא את המינימום שלה: $f''(x) = e^x - 2$ ומתקיים $f''(x) < 0$ לכל $x < \ln(2)$ ו-$f''(x) > 0$ לכל $x > \ln(2)$. לכן $x = \ln(2)$ היא נקודת מינימום מוחלטת של הפונקציה $f'(x)$ ב-$\mathbb{R}$ ולכל x מתקיים $f'(x) \geq f'(\ln(2)) > 0$. לכן הנגזרת תמיד חיובית ולפי משפט רול לא יתכנו שני פתרונות למשוואה $f(x) = 0$.
3. נגדיר $f(x) = 2x^3 - 5 + 2x$. מתקיים $f(0) < 0 < f(2)$ ולכן יש לפחות פתרון אחד בקטע $[0, 2]$. בנוסף, $f'(x) = 6x^2 + 2 > 0$ ולכן הנגזרת לעולם לא מתאפסת ולא ייתכנו שני פתרונות. מסקנה: קיים פתרון יחיד למשוואה $f(x) = 0$.

פתרון לשאלה 4.19

בכל הסעיפים נגזור את הפונקציה פעמיים ונשווה את הנגזרת השניה לאפס. כאשר הנגזרת השניה חיובית הפונקציה קמורה וכאשר היא שלילית הפונקציה קעורה. נקודות בהן הפונקציה עוברת מקמירות לקעירות (או להפך) הן נקודות הפיתול שלה.

1. מתקיים $f'(x) = -2xe^{-x^2}$ ולכן $f''(x) = (-2x)^2e^{-x^2} - 2e^{-x^2} = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$. הנגזרת השנייה חיובית כאשר $|x| > \sqrt{0.5}$ ובתחום זה הפונקציה קמורה, שלילית כאשר $-\sqrt{0.5} < x < \sqrt{0.5}$ ושם הפונקציה קעורה. הנקודות $x = \pm\sqrt{0.5}$ אם כך הן נקודות פיתול.
2. מתקיים $f'(x) = 3x^2 - 12x + 12$ ולכן $f''(x) = 6x - 12$. בתחום $x > 2$ הנגזרת השניה חיובית והפונקציה קמורה ובתחום $x < 2$ הפונקציה קעורה. הנקודה $x = 2$ היא נקודת הפיתול של הפונקציה.

3. מתקיים $f'(x) = 2xe^x + (1+x^2)e^x = (1+x)^2e^x$ ולכן $f''(x) = 2(1+x)e^x + (1+x)^2e^x = e^x(1+x)(3+x)$. הנגזרת השניה חיובית בתחומים $(-\infty,-3)$ ו-$(-1,\infty)$. ושם הפונקציה קמורה. בתחום $(-3,-1)$ הפונקציה קעורה כי הנגזרת שלילית והנקודות $x=-1,-3$ הן נקודות פיתול.

פתרון לשאלה 4.20

בכל הסעיפים הפונקציה רציפה בקטע הסגור וגזירה בקטע הפתוח, לכן נקודות הקיצון האפשריות היחידות הן הנקודות בהן הנגזרת מתאפסת וקצוות הקטע. על מנת למצוא את המקסימום והמינימום המוחלט נחשב את ערכי הפונקציה בכל הנקודות החשודות לקיצון, והנקודה שערך הפונקציה בה הוא הגדול ביותר תהיה המקסימום המוחלט וזו שבה ערך הפונקציה הוא הקטן ביותר תהיה המינימום המוחלט.

1. מתקיים $f'(x) = 3x^2 + 6x - 72$ והנגזרת מתאפסת בתחום רק בנקודה $x=4$. לכן שלושת הנקודות הרלוונטיות הן $f(5) = -70$, $f(4) = -86$ ו-$f(-5) = 400$. המינימום המוחלט מתקבל בנקודה $x=4$ והמקסימום המוחלט בנקודה $x=-5$.
2. מתקיים $f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 24x$ והנגזרת מתאפסת בנקודות $x=-2,0,1$. נציב ונקבל $f(-3) = 27$, $f(-2) = -32$, $f(0) = 0$, $f(1) = -5$, $f(2) = 32$. המקסימום המוחלט אם כך מתקבל בנקודה $x=2$ והמינימום המוחלט בנקודה $x=-2$.
3. מתקיים $f'(x) = 2x(6x-7)^{1/3} + \frac{2x^2}{(6x-7)^{2/3}}$ הנגזרת מתאפסת בנקודות $x=0,1$ ושם מתקיים $f(0)=0$ ו-$f(1)=-1$. בקצות תחום ההגדרה מתקיים $f(-1) = -\sqrt[3]{13} < -1$ ו-$f(2) = 4\cdot\sqrt[3]{5} > 0$ לכן אלו נקודות המינימום והמקסימום המוחלטות.

פתרון לשאלה 4.21

נפתור את השאלה בשלבים בהתאם להדרכה.

1. הפונקציה מוגדרת לכל x עבורו המכנה לא מתאפס, כלומר לכל $\mathbb{R}\setminus\{\pm\sqrt{12}\}$.
2. החיתוך עם ציר y הוא כאשר $x=0$ שם $f(0)=0$, לכן הנקודה היא $(0,0)$. חישוב ישיר מראה כי אין פתרונות נוספים למשוואה $f(x)=0$ לכן אין נקודות חיתוך נוספות עם ציר ה-x. הפונקציה חותכת את הצירים רק בנקודה אחת - ראשית הצירים.
3. נגזור את הפונקציה. $f'(x) = \frac{x^2(36-x^2)}{(12-x^2)^2}$ והסימן של הנגזרת נקבע לפי הסימן של $36-x^2$ (פרט לנקודה $x=0$ בה הנגזרת מתאפסת). הנגזרת חיובית בתחום $(-6,6)\setminus\{0,\pm\sqrt{12}\}$ ושלילית בתחומים $(-\infty,-6)$ ו-$(6,\infty)$. לכן הפונקציה עולה בתחום $(-6,6)\setminus\{0,\pm\sqrt{12}\}$ ויורדת בתחום $(-\infty,-6)\cup(6,\infty)$.
4. בהמשך לסעיף הקודם, הנקודה $x=-6$ היא נקודת מינימום והנקודה $x=6$ היא נקודת מקסימום, שכן בנקודות הללו הפונקציה משנה את התנהגותה מיורדת לעולה או מעולה ליורדת. הנקודה $x=0$ אינה נקודת קיצון למרות שהנגזרת מתאפסת בה, שכן הפונקציה עולה בנקודה זו.

5. נגזור פעם נוספת ונקבל $f''(x) = \frac{24x(12-x^2)(x^2+36)}{(12-x^2)^4}$. הפונקציה חיובית בתחומים $(-\sqrt{12}, 0)$ ו-$(\sqrt{12}, \infty)$ שם היא קעורה. הנקודה $x = 0$ היא נקודת פיתול (הפונקציה עוברת מקעירות לקמירות) ואילו הנקודות $x = \pm\sqrt{12}$ הן לא נקודות פיתול שכן הפונקציה לא מוגדרת בהן. ובתחום $(0, \sqrt{12})$ ושם הפונקציה קמורה ושלילית בתחומים $(-\infty, -\sqrt{12})$

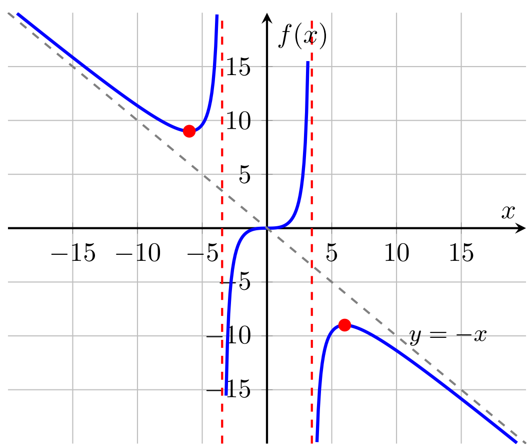
6. הנקודות $x = \pm\sqrt{12}$ הן אסימפטוטות אנכיות שכן

$$\lim_{x\to-\sqrt{12}^-} f(x) = \lim_{x\to\sqrt{12}^-} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to-\sqrt{12}^+} f(x) = \lim_{x\to\sqrt{12}^+} f(x) = -\infty$$

לגבי אסימפטוטות משופעות, מתקיים $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{12-x^2} = -1$. לכן לפונקציה אסימפטוטה משופעת עם שיפוע -1 ומקדם חופשי $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - (-x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{12x}{12-x^2} = 0$ כך שהאסימפטוטה המשופעת היא $y = -x$ הן ב-∞ והן ב-$-\infty$.

על סמך כל סעיפי הניתוח, ניתן לשרטט את הפונקציה:



איור 7.3: שרטוט של הפונקציה המופיעה בתרגיל 4.21.

7.5 פתרונות לפרק 5

פתרון לשאלה 5.1

בכל הסעיפים (באופן כללי באינטגרלים לא מסויימים) מומלץ לגזור את הפונקציה בסיום כדי לוודא שהתשובה נכונה.

1. זהו אינטגרל של פולינום כפול קבוע ולכן $\int 4x^5 \mathrm{d}x = \frac{4x^6}{6} + C$.
2. זהו סכום של שתי פונקציות. האחת היא פולינום והאינטגרל של השניה הוא $\ln(x)$, לכן $\int x^2 \pm \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} \pm \ln(x) + C$.
3. נחשב באמצעות אינטגרציה בחלקים. נוח לעשות אינטגרל לפונקציה e^x כי $\int e^x \mathrm{d}x = e^x$ והגזירה של x^2 מקטינה את החזקה ואחרי שתי גזירות התלות ב-x נעלמת.
$$\int x^2 e^x \mathrm{d}x = x^2 e^x - \int 2xe^x \mathrm{d}x = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$
כאשר האינטגרל האחרון מתבסס גם כן על אינטגרציה בחלקים (דוגמא 5.1).
4. נפעל לפי הרמז: $\ln(x) = 1 \cdot \ln(x)$ ונשתמש באינטגרציה בחלקים. את הפונקציה $\ln(x)$ נגזור כי אז היא תהפוך לפונקציה הרציונלית הפשוטה יותר $1/x$ ולפונקציה הקבועה 1 נעשה אינטגרל ונקבל x:
$$\int 1 \cdot \ln(x) \mathrm{d}x = x \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} \mathrm{d}x = x \ln(x) - x + C$$
5. נפתח סוגריים ונחשב אינטגרל של כל מחובר בנפרד:
$$\int (x^2-1)(x+2)\, \mathrm{d}x = \int x^3 - x + 2x^2 - 2\, \mathrm{d}x = \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + C$$

פתרון לשאלה 5.2

כמקודם, נגדיר $f(x) = e^x$, $G(x) = x$ ונקבל בהתאם כי $g(x) = G'(x) = 1$ וכן $F(x) = \int e^x \mathrm{d}x = e^x + 5$. האינטגרל המבוקש הוא של הפונקציה $G(x)f(x)$ לכן ניעזר בנוסחת האינטגרציה בחלקים ונקבל:
$$\int xe^x \mathrm{d}x = x(e^x+5) - \int 1 \cdot (e^x+5) \mathrm{d}x = xe^x - e^x + C$$
שכן בשני הגורמים מופיע $5x$ והביטוי מצטמצם.

מסקנה: שיטת האינטגרציה בחלקים עובדת ללא תלות באיזה קבוע C' נבחר, עבור הפונקציה שלה עושים אינטגרל $f(x)$, שכן הקבוע יצטמצם בשלב הבא:
$$\begin{aligned}\int f(x)G(x)\mathrm{d}x = &\\ &= (F(x)+C')G(x) - \int (F(x)+C')g(x)\mathrm{d}x \\ &= F(x)G(x) + C'G(x) - \int F(x)g(x)\mathrm{d}x - C'G(x) \\ &= F(x)G(x) - \int F(x)g(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

פתרון לשאלה 5.3

1. נציב $y = 2x + 3$ כדי לקבל אינטגרל עם משתנה אחד במכנה (ואז האינטגרל שלו הוא ln). לכן $\mathrm{d}y = 2\mathrm{d}x$ ונקבל

$$\int \frac{4}{2x+3}\mathrm{d}x = \int \frac{2}{y}\mathrm{d}y = 2\ln(y) + C = 2\ln(2x+3) + C$$

2. הביטוי הבעייתי באינטגרל הזה הוא $\sqrt{x}$ ולכן ננסה לפשט אותו על ידי ההצבה $y = \sqrt{x}$. לכן $\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}}$ ונקבל

$$\int \frac{\exp(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int 2\exp(y)\mathrm{d}y = 2e^y + C = 2e^{\sqrt{x}} + C$$

3. כמו בסעיף הראשון ננסה הצבה שבה y הוא המכנה $y = x^2 + x - 2$. לכן $\mathrm{d}y = (2x+1)\mathrm{d}x$ וזה בדיוק המונה:

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x-2}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{y}\mathrm{d}y = \ln(y) + C = \ln(x^2+x-2) + C$$

4. נשים לב שהמונה הוא הנגזרת של המכנה. לכן ההצבה $y = 1 + e^x$ מאוד נוחה שכן $\mathrm{d}y = e^x\mathrm{d}x$ וזהו בדיוק המונה:

$$\int \frac{e^x}{1+e^x}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{y}\mathrm{d}y = \ln(y) + C = \ln(1+e^x) + C$$

פתרון לשאלה 5.4

נבחר $y = x^2 + 1$ ולכן $\mathrm{d}y = 2x\mathrm{d}x$:

$$\int x\ln(x^2+1)\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}\ln(y)\mathrm{d}y = \frac{1}{2}(y\ln(y) - y) = \frac{1}{2}\left((x^2+1)\ln(x^2+1) - (x^2+1)\right) + C$$

וניתן לראות בנקל שהתשובה זהה לזו שהתקבלה באמצעות אינטגרציה בחלקים.

פתרון לשאלה 5.5

1. כל אחד מהאינטגרלים הוא מיידי ומתקבל

$$\int 2x^5 + 3x^{-1/2} - 2x^{-3}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^6 + 6x^{1/2} + x^{-2} + C$$

2. נרשום $\frac{x-1+1}{x-1} = \frac{x}{x-1}$ ולכן

$$\int \frac{x}{x-1}\mathrm{d}x = \int 1 + \frac{1}{x-1}\mathrm{d}x = x + \ln(x-1) + C$$

3. בלי השורש זה היה אינטגרל מיידי, אז ננסה להציב $y=\sqrt{x}$ ואז $\mathrm{d}y=\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$, כלומר $\mathrm{d}x=2y\mathrm{d}y$.

$$\int \frac{1}{\exp(\sqrt{x}/2)}\mathrm{d}x=\int \frac{2y}{\exp(y/2)}\ dy=\int 2ye^{-y/2}\mathrm{d}y$$

את האינטגרל הזה אפשר לפתור באמצעות אינטגרציה בחלקים, בדומה לדוגמא 5.1. האינטגרל שווה ל- $-4e^{-y/2}(y+2)+C$ ולכן האינטגרל המקורי שווה ל- $-4e^{-\sqrt{x}/2}(\sqrt{x}+2)+C$.

4. נציב $y=\sqrt{x+2}$ ולכן $\mathrm{d}y=\frac{1}{2\sqrt{x+2}}\mathrm{d}x$ כך ש- $\mathrm{d}x=2y\mathrm{d}y$. בנוסף, $y^2=x+2$ ולכן $x=y^2-2$:

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x+2}\mathrm{d}x&=\int (y^2-2)y2y\mathrm{d}y\\&=2\int y^4-2y^2\mathrm{d}y=2y^5/5-4y^3/3+C\\&=2(\sqrt{x+2})^5/5-4(\sqrt{x+2})^3/3+C\end{aligned}$$

5. נחשב על ידי אינטגרציה בחלקים: נעשה אינטגרל ל-x^a ונגזור את $\ln(x)$:

$$\int x^a\ln(x)\mathrm{d}x=\frac{x^{a+1}}{a+1}\ln(x)-\int\frac{x^a}{a+1}\mathrm{d}x=\frac{x^{a+1}}{a+1}\ln(x)-\frac{x^{a+1}}{(a+1)^2}+C$$

שימו לב שהחישוב נכון רק כאשר $a\neq -1$. אחרת, האינטרל של x^a איננו $\frac{x^{a+1}}{a+1}$ אלא $\ln(x)$. במקרה כזה, זהו אינטגרל של פונקציה כפול הנגזרת שלה ואפשר להשתמש בהצבה $y=\ln(x)$ עם $\mathrm{d}y=\frac{1}{x}\mathrm{d}x$:

$$\int\frac{1}{x}\ln(x)\mathrm{d}x=\int y\mathrm{d}y=y^2/2=\ln^2(x)/2+C$$

6. נפתח סוגריים:

$$\int(e^x+e^{-x})^2\mathrm{d}x=\int e^{2x}+2+e^{-2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}e^{-2x}+2x+C$$

7. כדי להיפטר מהשורש במכנה, ראשית נכפול את המונה והמכנה ב- $\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$:

$$\int\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int(x+1)^{1/2}+x^{1/2}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}((x+1)^{3/2}+x^{3/2})+C$$

8. נציב $y=\sqrt{x+1}$. לכן $\mathrm{d}y=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$ וכן $x=y^2-1$:

$$\int\frac{x}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x=\int 2(y^2-1)\mathrm{d}y=\frac{2}{3}y^3-2y=\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}-2(x+1)^{1/2}+C$$

9. זהו אינטגרל כמעט מיידי:

$$\int (4x-5)^{-7}\mathrm{d}x = -\frac{1}{24}(4x-5)^{-6}+C$$

כאשר הגורם 24 נבחר כדי להצמצם עם הנגזרת הפנימית (4) ועם החזקה (6).

10. נרשום את המכנה בתור $(3x-1)(3x-2)$ ונפרק את השבר לשניים:

$$\frac{x+1}{9x^2-9x+2} = \frac{A}{3x-1}+\frac{B}{3x-2} = \frac{x(3A+3B)+(-2A-B)}{9x^2-9x+2}$$

כדי שיתקיים שיוויון, נדרוש $3A+3B=1$ וגם $-2A-B=1$. הפתרון הינו $A=-4/3$ ו-$B=5/3$. לכן

$$\int \frac{x+1}{9x^2-9x+2}\mathrm{d}x = \int \frac{-4/3}{3x-1}+\frac{5/3}{3x-2}\mathrm{d}x = -\frac{4}{9}\ln(3x-1)+\frac{5}{9}\ln(3x-2)+C$$

11. נשתמש בחוקי החזקות:

$$\int \frac{2^x+5^x}{10^x}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{5^x}+\frac{1}{2^x}\mathrm{d}x = \frac{1}{5^x\ln(1/5)}+\frac{1}{2^x\ln(1/2)}+C$$

פתרון לשאלה 5.6

1. $\int_{-1}^{3} x^2\mathrm{d}x = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{3} = \frac{3^3-(-1)^3}{3} = \frac{28}{3}$

2. $\int_{-1}^{2} x^2+3x\mathrm{d}x = \left.\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\right|_{-1}^{2} = \frac{2^3}{3}+\frac{3\cdot 2^2}{2}-\frac{(-1)^3}{3}-\frac{3\cdot(-1)^2}{2} = \frac{15}{2}$

3. מתקיים $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$ לכן הביטוי שבערך המוחלט חיובי כאשר $x>1$ ושלילי כאשר $x<1$ (בתחום האינטגרציה $0<x<3$):

$$\begin{aligned}\int_0^3 |x^2+x-2|\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 -(x^2+x-2)\,\mathrm{d}x + \int_1^3 x^2+x-2\,\mathrm{d}x \\ &= \left.-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x\right|_0^1 + \left.\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right|_1^3 = \frac{59}{6}\end{aligned}$$

4. נשתמש בתכונות של $\ln$: $\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=\ln(1-x)-\ln(1+x)$. את האינטגרל של כל $\ln$ ניתן לחשב באמצעות תרגיל 5.13 על ידי שימוש בהצבות $y=1-x$ ו-$y=1+x$. נקבל

$$\int_{-0.5}^{0.5} \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\mathrm{d}x = (x-1)\ln(1-x)-x+(x+1)\ln(x+1)-x|_{-0.5}^{0.5} = 0$$

ניתן לראות זאת גם על ידי שימוש בתוצאה של תרגיל 5.8.

5. זה אינטגרל מיידי:

$$\int_0^{\ln(2)} e^{3x-1}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}e^{3x-1}\Big|_0^{\ln(2)} = \frac{e^{-1}}{3}(e^{3\ln(2)}-1) = \frac{7}{3}e^{-1}$$

6. נשתמש בהצבה $y=\sqrt{2x+1}$. לכן $\mathrm{d}y=\frac{2}{2\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x$ וכן $x=\frac{1}{2}(y^2-1)$. האינטגרל הלא מסויים יהיה אם כך

$$\int \frac{x}{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}(y^2-1)\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\left(\frac{y^3}{3}-y\right) = \frac{(2x+1)^{3/2}}{6} - \frac{\sqrt{2x+1}}{2}$$

נציב את גבולות האינטגרציה ונקבל שהתשובה היא 3.

פתרון לשאלה 5.7

בכל הסעיפים הנוסחא המתארת את הפונקציה משתנה בתחום האינטגרציה, לכן יש צורך בפירוק התחום לתתי תחומים וחישוב כל אינטגרל בנפרד, בדומה לסעיף 3 של תרגיל 5.6.

1. $\int_{-1}^{3}|x|\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0}-x\mathrm{d}x + \int_0^3 x\mathrm{d}x = 5$.
2. $\int_{-1}^{4}f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1(-1)\mathrm{d}x + \int_1^2 2x-3\mathrm{d}x = -1+0=-1$.
3. $\int_{-3}^{5}f(x)\mathrm{d}x = \int_1^2 4x^2\mathrm{d}x + \int_2^3 3x\mathrm{d}x = \frac{28}{3}+\frac{15}{2} = 16\frac{5}{6}$.
4. $\int_{-3}^{5}xf(x)\mathrm{d}x = \int_1^2 4x^3\mathrm{d}x + \int_2^3 3x^2\mathrm{d}x = 15+19=34$.

פתרון לשאלה 5.8

נחשב את האינטגרל על ידי חלוקה לתחומים:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_0^a f(x)\mathrm{d}x$$

נשתמש בהצבה $y=-x$ כדי לחשב את האינטגרל הראשון:

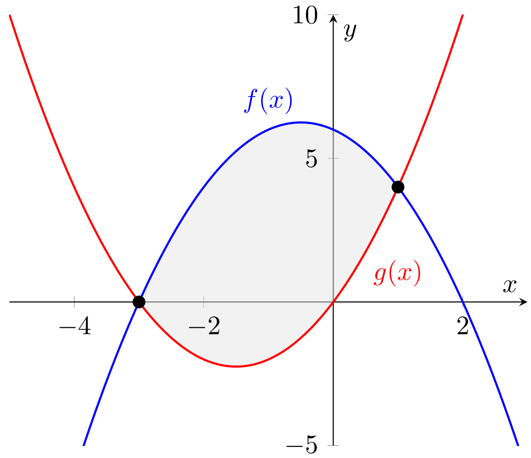
$$\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^0 -f(-y)\mathrm{d}y = \int_0^a f(-y)\mathrm{d}y = -\int_0^a f(y)\mathrm{d}y$$

כאשר המעבר האחרון מתקבל מכך שזו פונקציה אי זוגית. קיבלנו את הנגדי של האינטגרל בתחום החיובי ולכן הסכום שלהם הוא 0 וזהו ערכו של האינטגרל.

פתרון לשאלה 5.9

ראשית נמצא את נקודות החיתוך, עבורן מתקיים $f(x)=g(x)$, כלומר $-x^2-x+6=x^2+3x$. שתי נקודות החיתוך הן $x=1,-3$. בין שתי נקודות חיתוך אלו, מתקיים (ראו איור **??**) $f(x)>g(x)$ ולכן השטח בין שתי הפרבולות הינו

$$\int_{-3}^{1} f(x)-g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-3}^{1} -2x^2-4x+6\,\mathrm{d}x = \frac{64}{3}$$



איור 7.4: השטח בין הפרבולות הנתונות בשאלה 5.9.

פתרון לשאלה 5.10

אינטגרלים אלו מתאימים למשתנה מקרי מעריכי. האינטגרל הראשון הוא אינטגרל של צפיפות ההסתברות ומתכונת הנרמול יהיה שווה ל-1, האינטגרל השני הוא התוחלת והשלישי הוא חלק מחישוב השונות:

1. נציב $y = \lambda x$ ולכן $\mathrm{d}y = \lambda \mathrm{d}x$. ההצבה הזו הופכת את האינטגרל שנתון בשאלה לאינטגרל שמופיע בדוגמא 5.8 ושווה ל-1.
2. נציב $y = -\lambda x$ ונקבל $\int_0^\infty \lambda x e^{-\lambda x}\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}\int_0^{-\infty} ye^y\mathrm{d}y$ האינטגרל הלא מסויים הזה חושב באמצעות אינטגרציה בחלקים בדוגמא 5.1:

$$\frac{1}{\lambda}\int_0^{-\infty} ye^y\mathrm{d}y = \frac{1}{\lambda}\left(ye^y - e^y\right)\Big|_0^{-\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

3. גם כאן נציב $y = -\lambda x$ ונקבל $\int_0^\infty \lambda x^2 e^{-\lambda x}\mathrm{d}x = -\frac{1}{\lambda^2}\int_0^{-\infty} y^2e^y\mathrm{d}y$. את האינטגרל שהתקבל פתרנו בתרגיל 5.1 ולכן

$$-\frac{1}{\lambda^2}\int_0^{-\infty} y^2e^y\mathrm{d}y = -\frac{1}{\lambda^2}\left(y^2e^y - 2ye^y + 2e^y\right)\Big|_0^{-\infty} = \frac{2}{\lambda^2}$$

פתרון לשאלה 5.11

1. התוחלת הינה

$$\int_a^b \frac{x}{b-a}\mathrm{d}x = \left.\frac{x^2}{2(b-a)}\right|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

לחישוב השונות נחשב את האינטגרל

$$\int_a^b \frac{x^2}{b-a}\mathrm{d}x = \left.\frac{x^3}{3(b-a)}\right|_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

ולכן השונות הינה

$$\frac{a^2+ab+b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

2. את שני האינטגרלים הרלוונטיים חישבנו בתרגיל 5.10. לפיכך, התוחלת היא $\frac{1}{\lambda}$ והשונות הינה $\frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$.

3. לחישוב התוחלת ניעזר באינטגרל הלא מסויים:

$$\int \frac{1}{2\pi} x e^{-x^2/2}\mathrm{d}x = \int -\frac{1}{2\pi}\mathrm{d}y = -\frac{1}{2\pi}y = -\frac{1}{2\pi}e^{-x^2/2}$$

כאשר השתמשנו כאן בהצבה $y = e^{-x^2/2}$ עבורה $\mathrm{d}y = -xe^{-x^2/2}\mathrm{d}x$. הצבה של הגבולות $\pm\infty$ נותנת אפס ולכן ערכו של האינטגרל כולו, קרי התוחלת, שווה ל-0.

הערה: לא נכון לטעון שזו פונקציה אי זוגית ולכן האינטגרל שלה בקטע סימטרי סביב 0 שווה ל-0, כי בחישוב אינטגרל זה מחשבים שני גבולות נפרדים (נוסחא 5.1) ולא גבול מהצורה $\lim\limits_{a\to\infty}\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x$.

פתרון לשאלה 5.12

נחשב לפי הנוסחא: $GI = 2\int_0^1 x - x^2\,\mathrm{d}x = x^2 - \left.\frac{2x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}$.

פתרון לשאלה 5.13

1. נשתמש בהצבה $y = 3x+2$ עם $\mathrm{d}y = 3\mathrm{d}x$:

$$\int (3x+2)^{10}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int y^{10}\mathrm{d}y = \frac{y^{11}}{33} + C = \frac{(3x+2)^{11}}{33} + C$$

2. נוסיף ונוריד 4 כדי להגיע במונה לביטוי שניתן לצמצם עם המכנה:

$$\int \frac{x^2+4x+4-4}{x+2}\mathrm{d}x = \int x+2-\frac{4}{x+2}\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + 2x - 4\ln(x+2) + C$$

3. נציב $y = 4-5x$ עם $\mathrm{d}y = -5\mathrm{d}x$:

$$\int \sqrt[3]{4-5x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{5}\int \sqrt[3]{y}\,\mathrm{d}y = -\frac{3y^{4/3}}{20} + C = -\frac{3(4-5x)^{4/3}}{20} + C$$

4. נכפול ב"צמוד" של המכנה כדי שיהיה מצורה נוחה יותר:

$$\frac{x}{\sqrt{x+1}-1} = \frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{x+1-1} = \sqrt{x+1}+1$$

ולכן

$$\int \sqrt{x+1}+1\,\mathrm{d}x = \frac{2(x+1)^{3/2}}{3} + x + C$$

5. נוסיף ונחסיר מהמונה 7 כדי לפשט את השבר:

$$\int \frac{3x+9-7}{x+3}\mathrm{d}x = \int 3 - \frac{7}{x+3}\mathrm{d}x = 3x - 7\ln(x+3) + C$$

6. המכנה הינו $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$ ולכן ניתן לפשט אותו לשברים חלקיים:

$$\int \frac{2x-7}{(x-2)(x-3)}\mathrm{d}x = \int \frac{3}{x-2} - \frac{1}{x-3}\mathrm{d}x = 3\ln(x-2) - \ln(x-3) + C$$

פתרון לשאלה 5.14

1. בדומה לתרגיל 5.13 מתקיים

$$\int_{-1}^{1}(3x+1)^2\mathrm{d}x = \left.\frac{(3x+1)^3}{9}\right|_{-1}^{1} = \frac{4^3}{9} - \frac{(-2)^3}{9} = 8$$

2. נפרק את השבר לשניים:

$$\int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2}\mathrm{d}x = \int_1^4 x^{-2}+x^{-1.5}\,\mathrm{d}x = \left.\frac{x^{-1}}{-1} + \frac{x^{-0.5}}{-0.5}\right|_1^4 = \frac{7}{4}$$

3. נכפול בצמוד של המכנה:

$$\int_4^9 \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}\mathrm{d}x = \int_4^9 x^{0.5}+1\,\mathrm{d}x = \left.\frac{x^{3/2}}{3/2}+x\right|_4^9 = \frac{53}{3}$$

4. פרט לנגזרת הפנימית, זהו אינטגרל מיידי:

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{2x+3}\mathrm{d}x = \left.\frac{1}{2}\ln(2x+3)\right|_{-1}^{1} = \frac{\ln(5)}{2} \simeq 0.8$$

5. נפרק לשברים חלקיים:

$$\int_{0.5}^{1}\frac{1}{x(x+1)}\mathrm{d}x = \int_{0.5}^{1}\frac{-1}{x+1}+\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(x)-\ln(x+1)|_{0.5}^{1} = \ln(3/2) \simeq 0.41$$

6. נכפול ב"צמוד" של המכנה כדי לפשט אותו ולהעביר את השורש למונה:

$$\frac{x}{\sqrt{2x+1}+1} = \frac{x(\sqrt{2x+1}-1)}{2x+1-1} = \frac{1}{2}\left((2x+1)^{1/2}-1\right)$$

כעת ניתן לחשב את האינטגרל:

$$\frac{1}{2}\int_0^4 (2x+1)^{1/2}-1\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\frac{(2x+1)^{3/2}}{3}-x\right]_0^4 = \frac{7}{3}$$

7. זהו אינטגרל של פונקציה אי זוגית על תחום סימטרי סביב 0 ולכן לפי תרגיל 5.8, שווה ל-0.

8. הנוסחא המתארת את הפונקציה משתנה כאשר הביטוי שבתוך הערך המוחלט משנה סימן, קרי בנקודה $x=1$. לכן נפצל את האינטגרל לשני תחומים ונחשב את ערכו בכל תחום בנפרד:

$$\int_{-1}^3 |2x-2|\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 2-2x\,\mathrm{d}x + \int_1^3 2x-2\,\mathrm{d}x = \left[2x-x^2\right]_{-1}^1 + \left[x^2-2x\right]_1^3 = 4+4 = 8$$

9. זהו אינטגרל של פונקציה אי זוגית על תחום סימטרי סביב 0 ולכן לפי תרגיל 5.8, שווה ל-0.

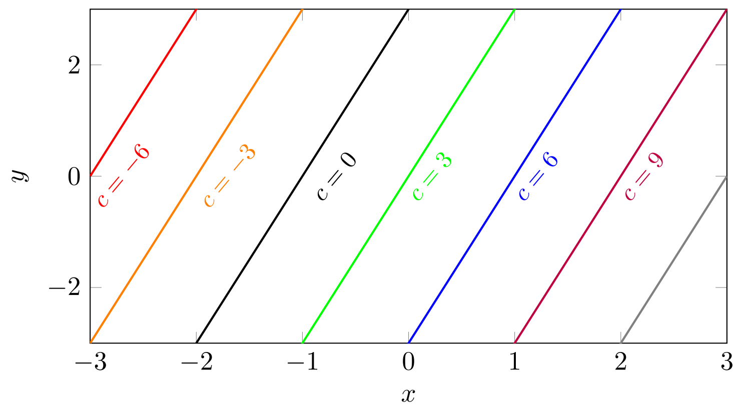
10. זהו אינטגרל של פונקציה אי זוגית על תחום סימטרי סביב 0 ולכן לפי תרגיל 5.8, שווה ל-0.

7.6 פתרונות לפרק 6

פתרון לשאלה 6.1

בכל הסעיפים נרשום $f(x,y)=c$ ונחלץ את y כתלות ב-x (וכמובן גם ב-c). נשרטט את העקומות המתאימות עבור ערכי c שונים וכך נקבל את העקומות שוות הערך של הפונקציות.

1. מהמשוואה $f(x,y)=c$ נקבל $y=3x+3-c$, כלומר עקומות שוות-ערך כאן הם קווים ישרים, ראו איור **??**.



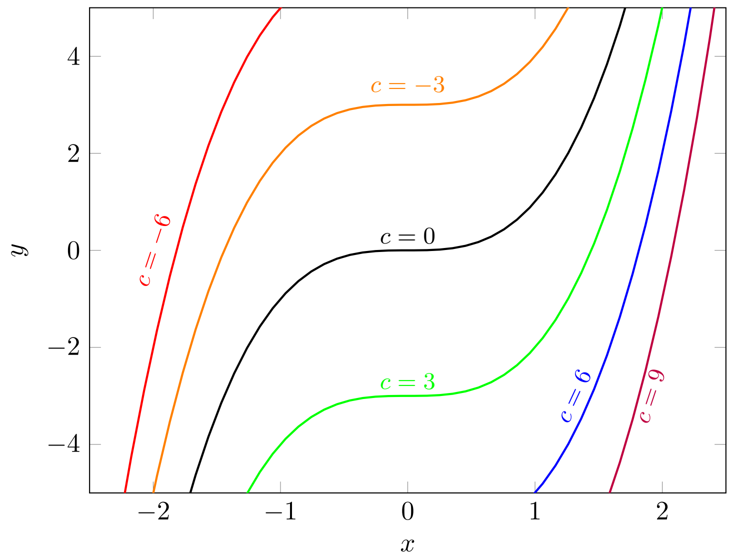
איור 7.5: מפת קווי גובה של הפונקציה $f(x,y)=3x-y+3$.

2. מהמשוואה $f(x,y)=c$ נקבל $y=x^3-c$, כלומר עקומות-שוות ערך כאן הן מהצורה x^3 מוזזות בקבוע, ראו איור 7.6.
3. המשוואה $f(x,y)=c$ מתארת עיגול שמרכזו בנקודה $(1,-3)$ ורדיוסו $\sqrt{c}$. עקומות שוות ערך הם עיגולים ברדיוסים שונים, ועבור $c<0$ אין פתרון ל-$f(x,y)=c$, ראו איור 7.7.
4. מהמשוואה $f(x,y)=c$ נקבל $y=x-\ln(c)$. לכן עקומות שוות-ערך כאן הם קווים ישרים וקיים פתרון למשוואה $f(x,y)=c$ רק עבור $c>0$. ראו איור 7.8.
5. מהמשוואה $f(x,y)=c$ נקבל $x^2y=e^c$ כלומר $y=e^c/x^2$, בתחום $x,y>0$. עקומות שוות-ערך הן פונקציות מהצורה $1/x^2$ כפול קבוע, ראו איור 7.9.

פתרון לשאלה 6.2

בחישוב של כל נגזרת חלקית, אנחנו מתייחסים לכל המשתנים האחרים כקבועים וגוזרים רק לפי המשתנה המתאים.

1. $f'_x(x,y,z)=\frac{2x}{y}$, $f'_y(x,y,z)=-\frac{x^2}{y^2}-\frac{1}{y+2z}$ ו-$f'_z(x,y,z)=-\frac{2}{y+2z}$.
2. $f'_x(x,y,z)=1+\frac{1}{y-z}$, $f'_y(x,y,z)=\frac{-(y-z)-(x-y)}{(y-z)^2}=\frac{z-x}{(y-z)^2}$ ו-$f'_z(x,y,z)=\frac{x-y}{(y-z)^2}$.



איור 7.6: מפת קווי גובה של הפונקציה $f(x,y)=x^3-y$.

3. $f'_x(x,y)=\ln(y)-\frac{y}{x}$, ו-$f'_y(x,y)=\frac{x}{y}-\ln(x)$.

פתרון לשאלה 6.3

מתקיים $f'_x(x,y)=2x-y/x^2$ ולכן $f''_{xx}(x,y)=2+2y/x^3$ וכן $f''_{xy}(x,y)=-x^{-2}$. בנוסף, $f'_y(x,y)=x^{-1}$ לכן $f''_{yy}(x,y)=0$ ו-$f''_{yx}(x,y)=-x^{-2}$. כצפוי, $f''_{xy}=f''_{yx}$.

פתרון לשאלה 6.4

את הנגזרות הראשונות חישבנו בשאלה 6.2. נחשב את הנגזרות השניות: $f''_{xy}(x,y)=1/y-1/x$ וכן $f''_{yx}(x,y)=1/y-1/x$ ואכן מתקיים $f''_{xy}=f''_{yx}$.

פתרון לשאלה 6.5

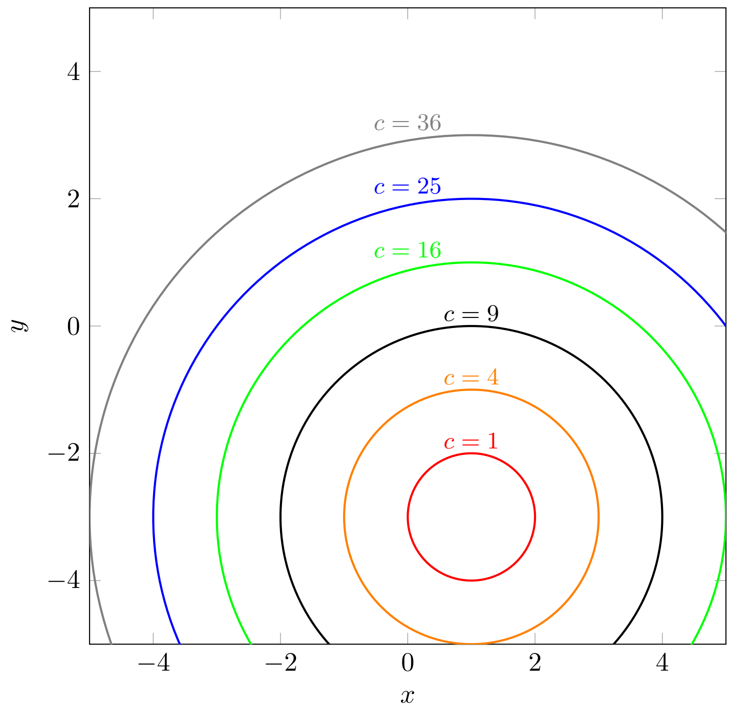
ראשית נפשט את הפונקציה:

$$f(x,y)=\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=-\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$$

נגזור את הפונקציה פעמיים לפי x:

$$f'_x(x,y)=-\frac{x}{(x^2+y^2)},\qquad f''_{xx}(x,y)=-\frac{x^2+y^2-x(2x)}{(x^2+y^2)^2}=-\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

נשים לב שבפונקציה $f(x,y)$ יש סימטריה בין x לבין y: אם נחליף את כל ההופעות של x ב-y ולהפך, נקבל בדיוק את אותה הפונקציה. לכן הנגזרת השנייה לפי y שווה לנגזרת השנייה לפי x כאשר מחליפים את כל ה-x ב-y ולהפך. לפיכך, $f''_{yy}(x,y)=-\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ ואכן מתקיים $f''_{xx}(x,y)+f''_{yy}(x,y)=0$.



איור 7.7: מפת קווי גובה של הפונקציה $f(x,y)=(x-1)^2+(y+3)^2$.

פתרון לשאלה 6.6

נחשב את הנגזרות הראשונות של הפונקציה בנקודה $(3,3)$:

$$f'_x(3,3)=\left.\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+3y}}\right|_{x=3,y=3}=\frac{9}{4}$$

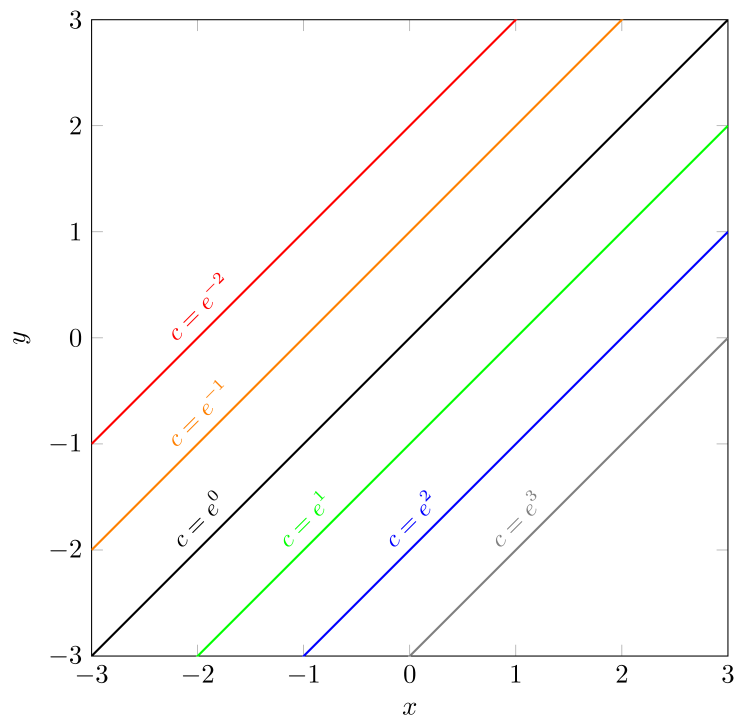
$$f'_y(3,3)=\left.\frac{3}{2\sqrt{x^3+3y}}\right|_{x=3,y=3}=\frac{1}{4}$$

לכן

$$f(2.98,3.01)\simeq\frac{9}{4}\cdot(-0.02)+\frac{1}{4}\cdot 0.01+f(3,3)=5.9575$$

לשם השוואה, הערך האמיתי הינו $f(2.98,3.01)=5.9577$.

פתרון לשאלה 6.7



איור 7.8: מפת קווי גובה של הפונקציה $f(x,y) = e^{x-y}$.

לפי כלל השרשרת:

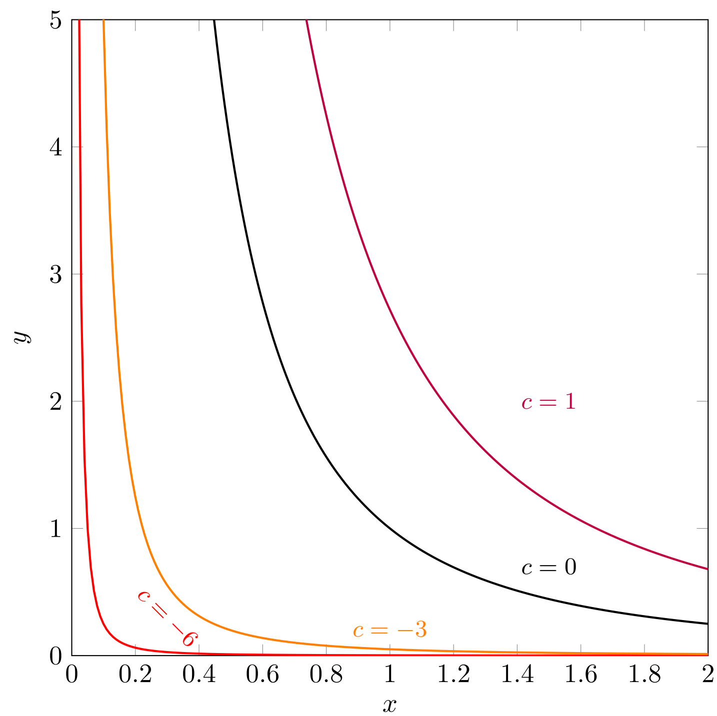
$$\begin{aligned} z'_t(t,s) &= f'_x(g(t,s),h(t,s))g'_t(t,s) + f'_y(g(t,s),h(t,s))h'_t(t,s) \\ &= 2g(t,s)se^{ts} - \frac{1}{h^2(t,s)} \cdot \frac{1}{t} \\ &= 2se^{2ts} - \frac{1}{t(\ln(s)+\ln(t))^2} \end{aligned}$$

ובאופן דומה:

$$\begin{aligned} z'_s(t,s) &= f'_x(g(t,s),h(t,s))g'_s(t,s) + f'_y(g(t,s),h(t,s))h'_s(t,s) \\ &= 2g(t,s)te^{ts} - \frac{1}{h^2(t,s)} \cdot \frac{1}{s} \\ &= 2te^{2ts} - \frac{1}{s(\ln(s)+\ln(t))^2} \end{aligned}$$

שימו לב שמאחר ו-t ו-s סימטריים בפונקציות $g(t,s)$ ו-$h(t,s)$, הרי שניתן היה להגיע ל-$z'_s(t,s)$ על ידי החלפת כל t ב-s (ולהפך) ב-$z'_t(t,s)$.

פתרון לשאלה 6.8



איור 7.9: מפת קווי גובה של הפונקציה $f(x,y) = 2\ln(x) + \ln(y)$.

לפי כלל השרשרת:

$$\begin{aligned} f'_t(t,s) &= 2x(t,s)\ln(y(t,s)) \cdot x'_t(t,s) + \frac{x^2(t,s)}{y(t,s)} \cdot y'_t(t,s) \\ &= \frac{2t}{s^2}\ln(3t-2s) + \frac{3t^2}{s^2(3t-2s)} \end{aligned}$$

באופן דומה:

$$\begin{aligned} f'_s(t,s) &= 2x(t,s)\ln(y(t,s)) \cdot x'_s(t,s) + \frac{x^2(t,s)}{y(t,s)} \cdot y'_s(t,s) \\ &= -\frac{2t^2}{s^3}\ln(3t-2s) - \frac{2t^2}{s^2(3t-2s)} \end{aligned}$$

פתרון לשאלה 6.9

ממשפט הפונקציה הסתומה עבור $x(y)$ נקבל $x'(y_0) = -\frac{f'_y(x_0,y_0)}{f'_x(x_0,y_0)} = \frac{1}{y'(x_0)}$.

פתרון לשאלה 6.10

נחשב את $z'_y(-1,e)$ לפי משפט הפונקציה הסתומה, כאשר אל x נתייחס כאל קבוע:

$$z'_y(-1,e)=-\frac{f'_y(-1,e,1)}{f'_z(-1,e,1)}=-\frac{\frac{1}{z}-\frac{1}{x+y+z}}{\frac{x^2}{2\sqrt{z}}-\frac{y}{z^2}-\frac{1}{x+y+z}}\Bigg|_{(-1,e,1)}=-\frac{1-\frac{1}{e}}{\frac{1}{2}-e-\frac{1}{e}}\simeq 0.244$$

באותה צורה:

$$z'_x(-1,e)=-\frac{f'_x(-1,e,1)}{f'_z(-1,e,1)}=-\frac{2x\sqrt{z}-\frac{1}{x+y+z}}{\frac{x^2}{2\sqrt{z}}-\frac{y}{z^2}-\frac{1}{x+y+z}}\Bigg|_{(-1,e,1)}=-\frac{-2-\frac{1}{e}}{\frac{1}{2}-e-\frac{1}{e}}\simeq -0.916$$

פתרון לשאלה 6.11

בכל השאלות נציב בפונקציה (tx,ty) ונבדוק האם התוצאה היא t באיזושהי חזקה כפול $f(x,y)$.

1. $f(tx,ty)=\frac{\sqrt{tx\cdot ty}}{tx+2ty}=f(x,y)$, לכן הפונקציה הומגנית מדרגה 0.
2. $f(tx,ty)=t^2xy\ln\left(\frac{t(x+3y)}{t(4x+y)}\right)=t^2f(x,y)$, לכן הפונקציה הומוגנית מדרגה 2.
3. $f(tx,ty)=5=f(x,y)$, לכן הפונקציה הומוגנית מדרגה 0.
4. $f(tx,ty)=At^mx^mt^ny^n=t^{m+n}f(x,y)$, לכן הפונקציה הומוגנית מדרגה $m+n$.

פתרון לשאלה 6.12

בכל הסעיפים נחשב את הנגזרות החלקיות של הפונקציה לפי כל אחד מהמשתנים ונבדוק האם משפט אוילר מתקיים.

1. מתקיים $f'_x(x,y)=yx^{y-1}$ וכן $f'_y(x,y)=x^y\ln(x)$, לכן

$$xf'_x(x,y)+yf'_y(x,y)=yx^y+yx^y\ln(x)\neq kx^y$$

לכל $k\in\mathbb{N}$. לכן פונקציה זו אינה הומוגנית.

2. מתקיים $f'_x(x,y)=mx^{m-1}+(m-n)x^{m-n-1}y^n$ וכן $f'_y(x,y)=nx^{m-n}y^{n-1}$ ולכן

$$xf'_x(x,y)+yf'_y(x,y)=mx^m+(m-n)x^{m-n}y^n+nx^{m-n}y^n=mf(x,y)$$

כלומר $f(x,y)$ פונקציה הומוגנית מדרגה m.

3. מתקיים $f'_x(x,y)=2x+3$ וכן $f'_y(x,y)=2y$ לכן $xf'_x(x,y)+yf'_y(x,y)=2x^2+3x+2y^2\neq kf(x,y)$ לכל $k\in\mathbb{N}$. לפיכך, פונקציה זו איננה הומוגנית.

4. מתקיים $f'_x(x,y)=2x+y-\frac{1}{x^2}$ וכן $f'_y(x,y)=2y+x-\frac{1}{y^2}$ קל לראות ש- $xf'_x(x,y)+yf'_y(x,y)=2x^2+2xy-\frac{1}{x}+2y^2-\frac{1}{y}\neq kf(x,y)$ לכל $k\in\mathbb{N}$, כך שהפונקציה איננה הומוגנית.

פתרון לשאלה 6.13

לשם הפשטות נוכיח עבור f'_x עבור פונקציה עם $n = 2$, כאשר ההרחבה ל-n כללי ושאר הנגזרות מיידית.

$f(x, y)$ הומוגנית מדרגה k. לפי משפט אוילר מתקיים,

$$kf(x, y) = xf'_x(x, y) + yf'_y(x, y).$$

נגזור את שני האגפים לפי x ונקבל:

$$kf_x(x, y) = f'_x(x, y) + xf''_{xx}(x, y) + yf''_{xy}(x, y),$$

כלומר

$$(k - 1)f'_x(x, y) = xf''_{xx}(x, y) + yf''_{xy}(x, y).$$

לפי משפט אוילר, הפונקציה $f'_x(x, y)$ הומוגנית מדרגה $k - 1$.

פתרון לשאלה 6.14

נניח שהפונקציות f, g הומוגניות מדרגה k ולשם הפשטות נניח ש-$n = 2$:

$$(f \pm g)(tx, ty) = f(tx, ty) \pm g(tx, ty) = t^k f(x, y) \pm t^k g(x, y) = t^k (f \pm g)(x, y)$$

ולכן גם הפונקציות $f \pm g$ הומוגניות מדרגה k.

פתרון לשאלה 6.15

לשם הפשטות נניח כי $n = 2$. תהי f הומוגנית מדרגה k_f ו-g הומוגנית מדרגה k_g. לכן

$$(f \cdot g)(tx, ty) = f(tx, ty) \cdot g(tx, ty) = t^{k_f} f(x, y) \cdot t^{k_g} g(x, y) = t^{k_f + k_g} (f \cdot g)(x, y)$$

ולכן הפונקציה $f \cdot g$ היא הומוגנית ממעלה $k_f + k_g$. ההוכחה שהפונקציה f/g הומוגנית מדרגה $k_f - k_g$ דומה.

פתרון לשאלה 6.16

1. ראשית נגזור את הפונקציה ונמצא את הנקודות בהן הנגזרות הראשונות מתאפסות:

$$f'_x(x, y) = 4 - 2x + y = 0, \qquad f'_y(x, y) = 2 + x - 2y = 0$$

קיבלנו שתי משוואות בשני נעלמים. נציב $y = 2x - 4$ מהמשוואה שמתארת את הנגזרת לפי x למשוואה המתארת את הנגזרת לפי y, ונקבל $2 + x - 2(2x - 4) = 0$, כלומר $-3x + 10 = 0$. לכן $x = 10/3$ וכן $y = 8/3$. הנקודה הסטצונרית היחידה היא $(10/3, 8/3)$.

נגזור פעם נוספת על מנת לסווג את הנקודה. $f''_{xx}(x, y) = -2$, $f''_{xy}(x, y) = 1$ ו-$f''_{yy}(x, y) = -2$. הדטרמיננטה היא $\Delta_f = (-2)(-2) - 1^2 = 3 > 0$ ומאחר והנגזרות השניות שליליות, הרי שנקודה זו היא נקודת מקסימום.

2. נפעל בדומה לסעיף הקודם.

$$f'_x(x,y)=e^{x-y}(x^2+2x-2y^2)=0, \qquad f'_y(x,y)=e^{x-y}(-x^2+2y^2-4y)=0$$

מאחר והאקספוננט תמיד חיובי, הנגזרות יתאפסות רק אם הביטוי בסוגריים יתאפס, כלומר רק כאשר $x^2+2x-2y^2=0$ וגם $-x^2+2y^2-4y=0$. אם נחבר את המשוואות נקבל $2x-4y=0$ כלומר $x=2y$. נציב זאת באחת המשוואות (למשל בשניה) ונקבל $-4y^2+2y^2-4y=-2y^2-4y=0$. למשוואה זו יש שני פתרונות: $y=0$ (מתאים ל-$x=0$) ו-$y=-2$ (מתאים ל-$x=-4$), ואלו שתי הנקודות הסטציונריות היחידות.

נחשב את הנגזרות השניות בנקודות שמצאנו:

$$\begin{aligned}
f''_{xx}(x,y)&=e^{x-y}(x^2+4x+2-2y^2)\\
f''_{xy}(x,y)&=e^{x-y}(-x^2-2x+2y^2-4y)\\
f''_{yy}(x,y)&=e^{x-y}(x^2-2y^2+8y-4)
\end{aligned}$$

מאחר וכל מה שחשוב הוא הסימן והביטוי $e^{x-y}>0$ ומשותף לכל הנגזרות, אפשר להתעלם ממנו ולחשב את הדטרמיננטה בלעדיו. עבור הנקודה $(0,0)$ נקבל $f''_{xx}(0,0)=2$, $f''_{xy}(0,0)=0$ ו-$f''_{yy}(0,0)=-4$. מתקיים $\Delta_f(0,0)<0$ וזוהי נקודת אוכף. עבור הנקודה $(-4,-2)$ נקבל $f''_{xx}(-4,-2)=-6$, $f''_{xy}(-4,-2)=8$ ו-$f''_{yy}(-4,-2)=-12$. לכן $\Delta_f(-4,-2)>0$ וזו נקודת מקסימום.

פתרון לשאלה 6.17

בכל הסעיפים נרשום את הלגרנז'יאן המתקבל, נגזור לפי כל אחד מהמשתנים (כולל כופל הלגרנז') ונבדוק באילו נקודות כל הנגזרות מתאפסות.

1. הלגרנז'יאן הינו $L(x,y,\lambda)=x^2y^2+\lambda(x+y-12)$ ולכן שלושת הנגזרות הראשונות הינן

$$\begin{cases}
L'_x(x,y,\lambda)=2xy^2+\lambda=0\\
L'_y(x,y,\lambda)=2x^2y+\lambda=0\\
L'_\lambda(x,y,\lambda)=x+y-12=0
\end{cases}$$

משתי המשוואות הראשונות מתקבל $xy^2=x^2y$ ולכן $x=y$ או $x=0$ או $y=0$. לפי תחום ההגדרה, שני המשתנים גדולים ממש מ-0 ולכן רק האפשרות $x=y$ מתאימה. נציב במשוואה השלישית ונקבל שהנקודה הסטציונרית היא $x=y=6$.

2. הלגרנז'יאן הינו $L(x,y,\lambda)=x^5+y^5+\lambda(x^3+y^3-2)$ ולכן שלושת הנגזרות הראשונות הינן

$$\begin{cases}
L'_x(x,y,\lambda)=5x^4+3x^2\lambda=0\\
L'_y(x,y,\lambda)=5y^4+3y^2\lambda=0\\
L'_\lambda(x,y,\lambda)=x^3+y^3-2=0
\end{cases}$$

תחום ההגדרה הוא $x>0, y>0$ לכן ניתן לחלק ב-x וב-y (בהתאמה) את שתי המשוואות הראשונות ולקבל $\lambda=-\frac{5}{3}x^2=-\frac{5}{3}y^2$ לכן $x=y$. מהמשוואה השלישית נקבל $x^3=1$ כלומר $x=y=1$, וזו הנקודה הסטציונרית היחידה.

3. הלגרנז'יאן הינו

$$L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = x^2+y^2+z^2+\lambda_1(x^2-xy+y^2-z^2-1)+\lambda_2(x^2+y^2-1)$$

ולכן חמשת הנגזרות הראשונות הינן

$$\begin{cases} L'_x(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = 2x(1+\lambda_1+\lambda_2) - y\lambda_1 = 0 \\ L'_y(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = 2y(1+\lambda_1+\lambda_2) - x\lambda_1 = 0 \\ L'_z(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = 2z(1-\lambda_1) = 0 \\ L'_{\lambda_1}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = x^2-xy+y^2-z^2-1 = 0 \\ L'_{\lambda_2}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = x^2+y^2-1 = 0 \end{cases}$$

מהמשוואה הרביעית והחמישית נקבל $z^2 = -xy$. מהמשוואה השלישית נקבל שתי אפשרויות: $z=0$ או $\lambda_1 = 1$.

אם $z=0$ אזי $x=0$ או $y=0$ ובשני המקרים מהמשוואה החמישית נקבל שהמשתנה השני הוא ±1. למשל, אם $x=0$ אז $y=\pm1$. לכן $\lambda_1=0$ וכן $\lambda_2=-1$ כך ששתי הנקודות הסטציונריות המתאימות הן $(0,\pm1,0)$. באופן דומה, ישנן שתי נקודות סטציונריות נוספות: $(\pm1,0,0)$.

כעת נתבונן במקרה שבו $z\neq0$ ולכן $\lambda_1=1$. במקרה כזה, המשוואה הראשונה היא $y=2x(2+\lambda_2)$ ואילו המשוואה השנייה היא $x=2y(2+\lambda_2)$. נציב את y מהמשוואה הראשונה בשניה ונקבל $x=4x(2+\lambda_2)^2$, דהיינו $\lambda_2=-3/2,-5/2$. כאשר $\lambda_2 = -3/2$ נקבל $y=x=\pm1/\sqrt{2}$ ואילו כאשר $\lambda=-5/2$ נקבל $y=-x=\pm1/\sqrt{2}$.

בנוסף, $z=\sqrt{-xy}$ לכן המקרה בו $x=y$ אינו אפשרי ואנחנו נותרים רק אם המצב בו $x=-y=\pm1/\sqrt{2}$ המוביל ל-$z=\pm\sqrt{1/2}$.

לסיכום, שמונה הנקודות הסטציונריות הן: $(\pm1,0,0)$, $(0,\pm1,0)$, $(\pm\frac{1}{\sqrt2},\mp\frac{1}{\sqrt2},\pm\frac{1}{\sqrt2})$, $(\pm\frac{1}{\sqrt2},\mp\frac{1}{\sqrt2},\pm\frac{1}{\sqrt2})$.

פתרון לשאלה 6.18

מתקיים $f'_x(x,y)=\frac{e^x}{e^x+e^y}$ וכן $f'_y(x,y)=\frac{e^y}{e^x+e^y}$ ולכן $f'_x(x,y)+f'_y(x,y)=1$. בנוסף, $f''_{yy}(x,y) = \frac{e^{y+x}}{(e^x+e^y)^2} = f''_{xx}(x,y)$. ואילו $f_{xy}(x,y) = -\frac{e^{y+x}}{(e^x+e^y)^2}$ כך שאכן מתקיים $f''_{xx}f''_{yy} = (f''_{xy})^2$.

פתרון לשאלה 6.19

הגזירה לפי x נעשית כמו נגזרת של פולינום, כלומר $f'_x(x,y)=yx^{y-1}$. הנגזרת לפי y היא בהתאם לנוסחא 4.1: $f'_y(x,y)=x^y\ln(x)$. באופן דומה, נחשב את הנגזרות המעורבות:

$$f''_{xy}(x,y) = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln(x)$$
$$f''_{yx}(x,y) = yx^{y-1}\ln(x) + x^{y-1}$$

כצפוי, קיבלנו את אותו הביטוי.

פתרון לשאלה 6.20

לפי כלל השרשרת מתקיים $g'_x(x,y,z)=(f(x-y,y-z,z-x))'_x=f'_x-f'_z$. באופן דומה נקבל $g'_y(x,y,z)=-f'_x+f'_y$ וכן $g'_z(x,y,z)=-f'_y+f'_z$. כל נגזרת מופיעה עם סימן חיובי וסימן שלילי ולכן סכומן יהיה בדיוק 0, כדרוש.

פתרון לשאלה 6.21

1. נגזור לפי כל אחד מהמשתנים באמצעות כלל השרשרת: $h'_x(x,y)=f'(x-ay)+g'(x+ay)$, $h'_y(x,y)=-af'(x-ay)+ag'(x+ay)$. ולכן $h''_{xx}(x,y)=f''(x-ay)+g''(x+ay)$ וכן $h''_{yy}(x,y)=a^2f(x-ay)+a^2g(x+ay)=a^2h''_{xx}(x,y)$, כדרוש.
2. גם כאן, נגזור לפי כלל השרשרת: $h'_x(x,y)=f(x+y)+xf'(x+y)+yg'(x+y)$ ולכן $h''_{xx}(x,y)=2f'(x+y)+xf''(x+y)+yg''(x+y)$. באותה צורה, $h'_y(x,y)=xf'(x+y)+g(x+y)+yg'(x+y)$ ולכן $h''_{yy}(x,y)=xf''(x+y)+2g'(x+y)+yg''(x+y)$. בנוסף, $h''_{xy}(x,y)=f'(x+y)+xf''(x+y)+g'(x+y)+yg''(x+y)$. הצבה ישירה של הביטויים שמצאנו מראה שאכן $h''_{xx}(x,y)-2h''_{xy}(x,y)+h''_{yy}(x,y)=0$.

פתרון לשאלה 6.22

נגדיר $f(x,y)=x^2y-e^{y-x}+\ln(xy)$.

1. נציב $x=1$ ונקבל $y-e^{y-1}+\ln(y)=0$. קל לראות כי $y=1$ פותרת את המשוואה ולכן $y(1)=1$.
2. נגזור את הפונקציה לפי y $f'_y(x,y)=x^2-e^{y-x}+\frac{1}{y}$ ונציב את הנקודה המבוקשת: $f'_y(1,1)=1-1+1=1\neq 0$. תנאי המשפט מתקיימים ולכן ניתן להשתמש במשפט הפונקציה הסתומה: $y'(1)=-\frac{f'_x(1,1)}{f'_y(1,1)}=-\left[2xy+e^{y-x}+1/x\right]_{(1,1)}=-4$.
3. באופן דומה, $x'(1)=-\frac{1}{4}$. ניתן לקבל זאת מחישוב ישיר או משאלה **??**.

פתרון לשאלה 6.23

1. מציבים ומקבלים $1/2-2+\ln(1)+1.5=0$ כך שהמשוואה מתקיימת ואכן מתקיים $f(1,1,2)=0$ כאשר $f(x,y,z)=\frac{x^2y}{z}-ze^{y-x}+\ln(xy)+1.5$.

   כדי לפתור את הסעיפים הבאים, נחשב את הנגזרות החלקיות:

$$f'_x(x,y,z)=\frac{2xy}{z}+ze^{y-x}+\frac{1}{x}$$
$$f'_y(x,y,z)=\frac{x^2}{z}-ze^{y-x}+\frac{1}{y}$$
$$f'_z(x,y,z)=-\frac{x^2y}{z^2}-e^{y-x}$$

2. מתקיים $f'_y(1,1,2)=\frac{1}{2}-2+1=-1/2\neq 0$ כך שניתן להשתמש במשפט הפונקציה הסתומה ולקבל $y'_x(1,2)=-\frac{f'_x(1,1,2)}{f'_y(1,1,2)}=-\frac{4}{-1/2}=8$.

3. באותה צורה $y'_z(1,2) = -\frac{f'_z(1,1,2)}{f'_y(1,1,2)} = -\frac{-5/4}{-1/2} = -5/2$.

4. בהמשך לסעיפים הקודמים, $x'_z(1,2) = -\frac{-5/4}{4} = \frac{5}{16}$ וכן $x'_y(1,2) = -\frac{-1/2}{4} = \frac{1}{8}$.

פתרון לשאלה 6.24

לפי משפט אוילר, מתקיים $2f(2,4) = 2f'_x(2,4)+4f'_y(2,4)$, ולכן $f'_y(2,4) = \frac{f(2,4)-f'_x(2,4)}{2}$. הנגזרת $f'_x(2,4) = 2$ נתונה בשאלה ועל מנת לחשב את $f(2,4)$ נשתמש בהומוגניות: $f(2,4) = 2^2 f(1,2) = 12$. לכן $f'_y(2,4) = 5$.

פתרון לשאלה 6.25

כמו בתרגיל 6.24, מתקיים $f'_y(4,2) = \frac{3f(4,2)-4f'_x(4,2)}{2}$. לפי ההומוגניות של f, נקבל $f(4,2) = 4^3 f(1,0.5) = 128$. בנוסף, f'_x הומוגנית מדרגה 2 (תרגיל 6.13) ולכן $f'_x(4,2) = 2^2 f'_x(2,1) = 4$. לסיכום, $f'_y(4,2) = 184$.

פתרון לשאלה 6.26

1. $g(tx,ty) = t^2xyf\left(\frac{t^3x^3}{ty},\frac{t^3y^3}{tx}\right) = t^2xy(t^2)^{12}f\left(\frac{x^3}{y},\frac{y^3}{x}\right) = t^{26}g(x,y)$ לכן הפונקציה g הומוגנית מדרגה 26.

2. מאחר ו-f הומוגנית מדרגה 12, אז הנגזרת f'_x הומוגנית מדרגה 11 (תרגיל 6.13) ונקבל $g(tx,ty) = f'_x\left(\frac{t^2x^2}{t(x+y)},\frac{t^2y^2}{t(x+y)}\right) = t^{11}f\left(\frac{x^2}{x+y},\frac{y^2}{x+y}\right) = t^{11}g(x,y)$ לכן g הומוגנית מדרגה 11.

פתרון לשאלה 6.27

לפי תרגיל 6.13, בהכרח גם f צריכה להיות לא הומוגנית כי אחרת f'_y תהיה הומוגנית. בחירה קלה תהיה פונקציה שהיא מכפלה של שני ביטויים, אחד שתלוי רק ב-x ואחד שתלוי רק ב-y, למשל $f(x,y) = y(x+3)$. מתקיים $f'_x(x,y) = y$ וזו פונקציה המוגנית מדרגה 1: $f'_x(tx,ty) = ty = tf'_x(x,y)$.

לעומת זאת, $f'_y(x,y) = x+3$ וזו אינה פונקציה הומוגנית כי $f'_x(tx,ty) = tx+3 \neq t(x+3) = tf'_x(x,y)$ ובוודאי שלאף k טבעי לא מתקיים $tx+3 = t^k(x+3)$ לכל x ולכל t, לכן $f'_y(x,y)$ אינה הומוגנית.

פתרון לשאלה 6.28

בכל הסעיפים נמצא את הנקודות בהן שתי הנגזרות מתאפסות, ונסווג את נקודת הקיצון באמצעות הנגזרות השניות והדטרמיננטה.

1. מתקיים $f'_x(x,y) = 2x$ וכן $f'_y(x,y) = -2(y-1)$ לכן הנקודה היחידה בה שתי הנגזרות מתאפסות היא $(0,1)$. קל לראות שזו נקודת אוכף, שכן הפונקציה היא סכום של שתי פרובולות, אחת עם מינימום ב-$x=0$ ואחת עם מקסימום ב-$y=1$. נראה זאת מפורשות:

   $f''_{xx}(x,y) = 2$, $f''_{xy}(x,y) = 0$ ו-$f''_{yy}(x,y) = -2$. לפיכך $\Delta_f(0,1) = -4 < 0$ וזו נקודת אוכף, כצפוי.

2. הנגזרות הראשונות הן $f'_x(x,y) = 2x + y - 1/x^2$ ו-$f'_y(x,y) = 2y + x - 1/y^2$. נשווה את הנגזרות לאפס ונקבל מערכת של שתי משוואות בשני נעלמים

$$\begin{cases} 2x + y - \frac{1}{x^2} = 0 \\ 2y + x - \frac{1}{y^2} = 0 \end{cases}$$

אם נחסר את המשוואות נקבל $(x-y)\left(1 + \frac{x+y}{x^2y^2}\right) = 0$ כלומר $x = y$ או $1+\frac{x+y}{x^2y^2} = 0$. אם נחבר את המשוואות נקבל $3(x+y) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}$ מכאן $x + y > 0$ ולכן שני המחוברים בביטוי $1 + \frac{x+y}{x^2y^2}$ חיוביים וסכומם לא יכול להיות אפס. נסכם, בהכרח $x = y$ ועל ידי הצבה באחת המשוואות נקבל $3x = \frac{1}{x^2}$, כלומר הנקודה הסטציונרית היחידה היא $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}, \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)$.

נגזור פעם נוספת: $f''_{xx}(x,y) = 2 + 2/x^3$, $f''_{xy}(x,y) = 1$ ו-$f''_{yy}(x,y) = 2 + 2/y^3$. לכן $f''_{yy}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}, \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right) = f''_{xx}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}, \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right) = 8$ ואז $\Delta_f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}, \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right) = 8^2 - 1 > 0$. הנגזרות השניות חיוביות והדטרמנטיננטה חיובית, לכן זוהי נקודת מינימום.

3. מתקיים $f'_x(x,y) = 2x - y - 2$ וכן $f'_y(x,y) = -x + 2y + 1$. הנקודה היחידה המאפסת את שתי הנגזרות היא $(1,0)$. נגזור פעם נוספת: $f''_{xx}(x,y) = 2$, $f''_{xy}(x,y) = -1$ ו-$f''_{yy} = 2$, לכן $\Delta_f(1,0) = 4 - 1 = 3 > 0$. מאחר וגם הנגזרות השניות חיוביות, זו נקודת מינימום של הפונקציה.

4. נחשב את הנגזרות הראשונות: $f'_x(x,y) = x^2y^2(36 - 4x - 3y)$ וכן $f'_y(x,y) = x^3y(24 - 2x - 3y)$. נחפש נקודות בהן הנגזרות מתאפסות, תחת ההנחה כי $x, y > 0$, כלומר נדרוש

$$\begin{cases} 36 - 4x - 3y = 0 \\ 24 - 2x - 3y = 0 \end{cases}$$

הפתרון היחיד הינו $(6,4)$.

נגזור פעם נוספת: $f''_{xx}(x,y) = -6xy^2(2x + y - 12)$, $f''_{yy}(x,y) = -2x^3(x + 3y - 12)$, ומתקיים $f''_{xy}(x,y) = x^2y(-8x - 9y + 72)$ $f''_{xx}(6,4) = -2304$, $f''_{yy}(6,4) = -2592$, $f''_{xy}(6,4) = -1728$ כך ש $\Delta_f(6,4) > 0$ וזוהי נקודת מקסימום.

5. מתקיים $f'_x(x,y) = \frac{y}{2\sqrt{x}} - 1$ וכן $f'_y(x,y) = \sqrt{x} - 2y + 6$. הנקודה היחידה בה הנגזרות מתאפסות היא $(4,4)$.

הנגזרות השניות הינן $f''_{xx}(x,y) = -\frac{y}{4\sqrt{x^3}}$, $f''_{yy}(x,y) = -2$, וכן $f''_{xy}(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. לכן $\Delta_f(4,4) = (-\frac{1}{8}) \cdot (-2) - \frac{1}{16} > 0$ ולכן זו נקודת מקסימום.

6. נגזור: $f'_x(x,y) = e^{x/2}(1 + x/2 + y^2/2)$, $f'_y(x,y) = 2ye^{x/2}$. הנגזרת של y שווה ל-0 רק כאשר $y = 0$ ולכן הנגזרת של x שווה לאפס רק כאשר גם $x = -2$. הנקודה הסטציונרית היחידה אם כך היא $(-2,0)$.

$f''_{xx}(x,y) = e^{x/2}(1 + x/4 + y^2/4)$, $f''_{xy}(x,y) = ye^{x/2}$, $f''_{yy}(x,y) = 2e^{x/2}$. נציב את הנקודה הסטציונרית: $f''_{xx}(-2,0) = e^{-1}/2$, $f''_{xy}(-2,0) = 0$ ו-$f''_{yy}(-2,0) = 2e^{-1}$, לכן $\Delta_f(-2,0) = e^{-2} > 0$. בשילוב עם $f''_{xx}(-2,0), f''_{yy}(-2,0) > 0$ נקבל שזו נקודת מינימום.

7. מתקיים $f'_x(x,y) = 3x^2 - 3y$ וכן $f'_y(x,y) = -3y^2 - 3x$, כך ששתי הנגזרות מתאפסות רק כאשר $y = x^2$ וגם $x = -y^2$, כלומר רק בנקודות $(0,0)$ ו-$(-1,1)$.

נגזור פעם נוספת: $f''_{xx}(x,y) = 6x$, $f''_{xy}(x,y) = -3$ ו-$f''_{yy}(x,y) = -6y$. מכאן $\Delta_f(0,0) = 0 - (-3)^2 < 0$ וזו נקודת אוכף.

בנוסף, $\Delta_f(-1,1) = (-6)\cdot(-6) - (-3)^2 > 0$ ולכן זו נקודת מקסימום שכן שתי הנגזרות השניות שליליות (ושוות ל--6).

8. מתקיים $f'_x(x,y) = -3x\sqrt{x^2+y^2}$, $f'_y(x,y) = -3y\sqrt{x^2+y^2}$ והנקודה היחידה בה שתי הנגזרות מתאפסות הן $(0,0)$. הבעיה בפונקציה זו היא שחישוב הנגזרת השניה מוביל לפונקציה עם $\sqrt{x^2+y^2}$ במכנה, לכן הנגזרת השניה לא מוגדרת ולא ניתן להשתמש במבחן הדטרמיננטה בשביל לקבוע את טיב הנקודה הסטציונרית.

יחד עם זאת, קל לראות שנקודה זו היא נקודת מקסימום. ראשית, הנקודה הסטציונרית היחידה של הפונקציה x^2+y^2 היא $(0,0)$ והיא נקודת מינימום, לכן זו גם נקודת מינימום של חזקה של פונקציה זו ולכן זו נקודת מקסימום של מינוס הפונקציה.

דרך נוספת היא באמצעות השוואה. מתקיים $x^2+y^2 \ge 0$ לכן $\sqrt{(x^2+y^2)^3} \ge 0$ ולכן $f(x,y) = 1 - \sqrt{(x^2+y^2)^3} \le 1 = f(0,0)$, כך ש-$(0,0)$ היא נקודת מקסימום מוחלטת.

פתרון לשאלה 6.29

בכל הסעיפים נחשב את הלגרנז'יאן הכולל את הפונקציה והאילוץ ונמצא את הנקודות המאפסות את הנגזרות הראשונות שלו (כולל לפי כופל הלגרנז').

1. מתקיים $L(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x^2 - 2x + y^2 - 4y)$ ולכן

$$\begin{cases} L'_x(x,y,\lambda) & = 2x + \lambda(2x-2) = 0 \\ L'_y(x,y,\lambda) & = 2y + \lambda(2y-4) = 0 \\ L'_\lambda(x,y,\lambda) & = x^2 - 2x + y^2 - 4y = 0 \end{cases}$$

משתי המשוואות הראשונות מקבלים $x = \frac{\lambda}{1+\lambda}$ ו-$y = \frac{2\lambda}{1+\lambda}$ והצבה במשוואה השלישית מובילה למשוואה $\lambda^2 + 2\lambda = 0$. יש שני פתרונות ולכן שתי נקודות סטציונריות: כאשר $\lambda = 0$ הנקודה הסטציונרית היא $(0,0)$ וכאשר $\lambda = -2$ הנקודה הסטציונרית היא $(2,4)$.

2. מתקיים $L(x,y,\lambda) = 4x^2 - 4xy + y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 25)$ ולכן:

$$\begin{cases} L'_x(x,y,\lambda) & = 8x - 4y + 2x\lambda = 0 \\ L'_y(x,y,\lambda) & = 2y - 4x + 2y\lambda = 0 \\ L'_\lambda(x,y,\lambda) & = x^2 + y^2 - 25 = 0 \end{cases}$$

מהמשוואה הראשונה נקבל $y = x\frac{4+\lambda}{2}$. נציב בשנייה:

$$0 = (2+2\lambda)y - 4x = x((1+\lambda)(4+\lambda) - 4) = x(\lambda^2 + 5\lambda)$$

לא ייתכן כי $x = 0$ שכן אז בהכרח גם $y = 0$ והאילוץ לא מתקיים. לכן $\lambda = 0$ או $\lambda = -5$. כאשר $\lambda = 0$ נקבל $y = 2x$ והצבה במשוואה השלישית תוביל ל $x = \pm\sqrt{5}$ ולכן $y = \pm 2\sqrt{5}$. כאשר $\lambda = -5$ נקבל $y = -x/2$ ולכן $x = \pm 2\sqrt{5}$ עם $y = \mp\sqrt{5}$. לסיכום, ארבע הנקודות הסטציונריות הן $(\pm\sqrt{5}, \pm 2\sqrt{5})$ ו-$(\pm 2\sqrt{5}, \mp\sqrt{5})$.

3. מתקיים $L(x,y,\lambda)=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\lambda\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}-\frac{1}{8}\right)$ ולכן:

$$\begin{cases} L'_x(x,y,\lambda) &= -\frac{1}{x^2}-\frac{2\lambda}{x^3}=0 \\ L'_y(x,y,\lambda) &= -\frac{1}{y^2}-\frac{2\lambda}{y^3}=0 \\ L'_\lambda(x,y,\lambda) &= \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}-\frac{1}{8}=0 \end{cases}$$

משתי המשוואות הראשונות נקבל $x=y=-2\lambda$ ולכן המשוואה השלישית היא בעצם $\frac{2}{x^2}=\frac{1}{8}$ שפתרונה $x=\pm4$. לכן שתי הנקודות הסטציונריות הן $(\pm4,\pm4)$.

4. מתקיים $L(x,y,\lambda)=\ln(xy)+\lambda(x^3+xy+y^3)$. לכן

$$\begin{cases} L'_x(x,y,\lambda) &= \frac{1}{x}+\lambda(3x^2+y)=0 \\ L'_y(x,y,\lambda) &= \frac{1}{y}+\lambda(3y^2+x)=0 \\ L'_\lambda(x,y,\lambda) &= x^3+xy+y^3=0 \end{cases}$$

נכפול את המשוואה הראשונה ב-x, את השניה ב-y ונשווה אותן. נקבל $\lambda x(3x^2+y)=\lambda y(3y^2+x)$, כלומר $3\lambda(x^3-y^3)=0$. מאחר ו-$\lambda\neq0$ (אחרת הנגזרות לפי x ולפי y לא מתאפסות) בהכרח $x=y$.

נציב בזאת במשוואה השלישית ונקבל $2x^3+x^2=0$. מאחר ו-$x\neq0$ (לא בתחום ההגדרה של הפונקציה) הרי שניתן לחלק בו ולקבל $2x+1=0$ כלומר $x=y=-1/2$, וזו הנקודה הסטציונרית היחידה.

5. הפעם הלגרנז'יאן כולל שלושה משתנים ואת האילוץ: $L(x,y,z,\lambda)=2x^2+3y^2+4z^2+\lambda(x+y+z-13)=0$ ולכן הנגזרות הראשונות הן

$$\begin{cases} L'_x(x,y,z,\lambda) &= 4x+\lambda=0 \\ L'_y(x,y,z,\lambda) &= 6y+\lambda=0 \\ L'_z(x,y,z,\lambda) &= 8z+\lambda=0 \\ L'_\lambda(x,y,z,\lambda) &= x+y+z-13=0 \end{cases}$$

נביע כל משתנה במונחי λ ונקבל $x=-\lambda/4$, $y=-\lambda/6$ ו-$z=-\lambda/8$, כך שהמשוואה הרביעית הופכת ל-$-\lambda(1/4+1/6+1/8)=13$. הפתרון הינו $\lambda=-24$ ולכן $x=6$, $y=4$ ו-$z=3$. הנקודה הסטציונרית היחידה אם כך היא $(6,4,3)$.

6. מתקיים $L(x,y,z,\lambda)=x-2y-2z+\lambda(x^2+y^2+z^2-9)$ והנגזרות הן

$$\begin{cases} L'_x(x,y,z,\lambda) &= 1+2\lambda x=0 \\ L'_y(x,y,z,\lambda) &= -2+2\lambda y=0 \\ L'_z(x,y,z,\lambda) &= -2+2\lambda z=0 \\ L'_\lambda(x,y,z,\lambda) &= x^2+y^2+z^2-9=0 \end{cases}$$

כלומר $x=-\frac{1}{2\lambda}$, $y=\frac{1}{\lambda}$, $z=\frac{1}{\lambda}$ והמשוואה האחרונה תהא $9=\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{4\lambda^2}$. מכאן $\lambda=\pm\frac{1}{2}$ ולכן שתי הנקודות הסטציונריות הן $(\mp1,\pm2,\pm2)$.

7. הלגרנז'יאן הינו $L(x,y,z,\lambda) = xy^2z^3 + \lambda(x+y+z-12) = 0$ ולכן

$$\begin{cases} L'_x(x,y,z,\lambda) & = y^2z^3 + \lambda = 0 \\ L'_y(x,y,z,\lambda) & = 2xyz^3 + \lambda = 0 \\ L'_z(x,y,z,\lambda) & = 3xy^2z^2 + \lambda = 0 \\ L'_\lambda(x,y,z,\lambda) & = x+y+z-12 = 0 \end{cases}$$

נכפול את המשוואה הראשונה ב-x, השניה ב-y והשלישית ב-z ונקבל $xy^2z^3 = -\lambda x$, $xy^2z^3 = -\lambda y/2$, $xy^2z^3 = -\lambda z/3$. האגפים הימניים בשלושת הביטויים אם כך שווים ולכן $x = y/2 = z/3$ (לא ייתכן $\lambda = 0$ כי אז $y = 0$ או $z = 0$ ונקודות אלו לא בתחום ההגדרה). בכתיב אחר $x = y/2$ וגם $z = 3y/2$ ולכן המשוואה האחרונה היא למעשה $3y = 12$ והנקודה הסטציונרית היחידה בתחום $x,y,z > 0$ היא $(2,4,6)$.

8 שאלות הכנה למבחן

בפרק זה תמצאו מגוון תרגילים מסכמים של **כל** החומר. תרגילים אלו ברמת קושי גבוהה יותר מאשר מרבית התרגילים בפרקים הקודמים, וכן עוסקים בכל החומר מה שמוסיף לרמת הקושי.

בהצלחה!

תרגיל 8.1. הוכיחו כי למשוואה

$$3^x - |x| = 0$$

יש פתרון יחיד וחשבו אותו בדיוק של ספרה אחת אחרי הנקודה העשרונית באמצעות שיטת החציה.

תרגיל 8.2. הוכיחו כי לפונקציה

$$f(x) = x^3 + 2e^x - 3x^2 + 4x + 2$$

נקודת פיתול יחידה.

הערה: לא נדרש למצוא אותה.

תרגיל 8.3. נגדיר

$$f(x,y) = e^{\left(\frac{x}{y}+1\right)} + \ln\left(\frac{y}{x} + 12\right)$$

1. האם הפונקציה $f(x,y)$ הומוגנית? אם כן - מאיזו דרגה. אם לא - הוכיחו.
2. בנוסף, נגדיר $h(x) = f(x,2x)$. האם הפונקציה $h(x)$ הומוגנית? אם כן - מאיזו דרגה. אם לא - הוכיחו.

תרגיל 8.4. חשבו, אם קיים, את הגבול

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^x\left(x^2-2x+1\right)^2}{(e^x-e)^2}$$

תרגיל 8.5. מצאו את תחומי העליה והירידה של הפונקציה

$$f(x) = \frac{x^2}{|x-1|}$$

תרגיל 8.6. נגדיר

$$f(x,y) = x^2 + 2x + 3y^2$$

1. מצאו וסווגו את הנקודות הסטציונריות של הפונקציה $f(x,y)$ ללא אילוצים.
2. מצאו את הנקודות הסטציונריות של הפונקציה $f(x,y)$ בכפוף לאילוץ

$$x^2 + y^2 = 3$$

8.1 פתרונות לפרק 8

פתרון לשאלה 8.1

נגדיר $f(x) = 3^x - |x|$. זו פונקציה רציפה המקיימת $f(0) = 1 > 0 > -2/3 = f(-1)$ ולכן לפי משפט ערך הביניים קיים $c \in (-1, 0)$ כך ש-$f(c) = 0$. למשוואה אם כך יש לפחות פתרון אחד.

בתחום $x < 0$ מתקיים $f(x) = 3^x - (-x)$ ולכן $f'(x) = 3^x \ln(3) + 1 > 0$. לכן אין פתרונות נוספים למשוואה בתחום $x < 0$, שכן אם היה פתרון נוסף $f(d) = 0$, אזי לפי משפט רול הנגזרת הייתה צריכה להתאפס בנקודה כלשהי בין c ל-d וזה לא ייתכן.

בתחום $x > 0$ מתקיים $f(x) = 3^x - x$ ולכן $f'(x) = 3^x \ln(3) - 1 > 0$ (כי $3^x > 3^0 = 1$ לכל $x > 0$). לכן הפונקציה עולה לכל $x > 0$, ולכל $x \geq 0$ מתקיים $f(x) \geq f(0) = 1 > 0$. לכן אין פתרונות למשוואה $f(x) = 0$ בתחום $x \geq 0$.

המסקנה משני הטיעונים הללו היא שלא ייתכנו פתרונות נוספים למשוואה, ולכן יש לה רק פתרון יחיד.

שימו לב שלא ניתן להשתמש במשפט רול באופן רגיל (להראות שהנגזרת לא מתאפסת לכל x) שכן הפונקציה לא גזירה ב-$x = 0$.

נמצא את הפתרון באמצעות שיטת החציה:

$f(-0.5) > 0$, לכן הפתרון נמצא בקטע $[-1, -0.5]$.

$f(-0.75) < 0$ לכן הפתרון נמצא בקטע $[-0.75, -0.5]$.

$f(-0.625) < 0$ לכן הפתרון נמצא בקטע $[-0.625, -0.5]$.

$f(-0.5625) < 0$ לכן הפתרון נמצא בקטע $[-0.5625, -0.5]$, כלומר הספרה הראשונה של הפתרון אחרי הנקודה העשרונית היא 5 (הפתרון הוא $-0.5...$).

פתרון לשאלה 8.2

נקודות הפיתול נקבעות לפי הנגזרת השניה, לכן נגדיר

$$g(x) = f''(x) = 6x + 2e^x - 6$$

הפונקציה $g(x)$ רציפה ומקיימת $g(0) = -4 < 0 < 2e = g(1)$ כך שלפי משפט ערך הביניים קיימת נקודה $c \in (0, 1)$ כך ש $g(c) = 0$.

בנוסף, $g'(x) = 6 + 2e^x > 0$, כלומר הנגזרת לא מתאפסת באף נקודה ולפי משפט רול, לא יתכנו למשוואה $g(x) = 0$ פתרונות נוספים. מרציפות, בהכרח מתקיים $g(x) > 0$ לכל $x > c$ ו-$g(x) < 0$ לכל $x < c$. בתחום $x > c$ הפונקציה $f(x)$ קמורה (הנגזרת השניה שלה חיובית) ובתחום $x < c$ הפונקציה $f(x)$ קעורה (הנגזרת השניה שלילית). אפשר לקבוע זאת גם מכך ש-$g'(x)$ חיובית ולכן הפונקציה $g(x)$ עולה ממש.

לסיכום, הפונקציה עוברת מקמירות לקעירות רק בנקודה אחת, $x = c$, וזו נקודת הפיתול היחידה של הפונקציה.

שימו לב: לא מספיק להראות שהנגזרת השנייה מתאפסת בדיוק פעם אחת (חישבו על x^4), חובה להראות שיש רק נקודה אחת שבה הפונקציה עוברת מקמירות לקעירות.

פתרון לשאלה 8.3

מתקיים $f(tx, ty) = e^{tx/ty+1} + \ln(\frac{ty}{tx} + 12) = f(x, y)$, כלומר הפונקציה הומוגנית מדרגה 0: $f(tx, ty) = t^0 f(x, y)$.

אפשר, אבל לחלוטין לא רצוי, להשתמש כאן גם במשפט אוילר. חישוב ישיר מראה שמתקיים $xf_x(x, y) + yf_y(x, y) = 0$, כלומר הפונקציה הומוגנית מדרגה 0.

בהמשך, מאחר והערך של $f(x,y)$ נקבע רק לפי היחס שבין x ל-y, נקבל

$$h(x) = f(x, 2x) = e^{1/2+1} + \ln(2+12)$$

כלומר $h(x)$ היא פונקציה קבועה וככזו הומוגנית מדרגה 0.

פתרון לשאלה 8.4

שימו לב ש $x^x \to 1$ כלומר הערך של הגבול תלוי רק בגורמים האחרים (אריתמטיקה של גבולות). נחשב את הגבול שנשאר באמצעות לופיטל (זה גבול מהצורה $0/0$):

$$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^4}{(e^x-e)^2} = \lim_{x\to1}\frac{4(x-1)^3}{2(e^x-e)e^x}$$

מתקיים $\frac{4}{2e^x} \to 2e^{-1}$ והגבול שנשאר ניתן לחישוב על ידי הפעלה חוזרת של משפט לופיטל:

$$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^3}{e^x-e} = \lim_{x\to1}\frac{3(x-1)^2}{e^x} = 0$$

ולכן גם הגבול המקורי שואף ל-$1\cdot 2e^{-1}\cdot 0 = 0$.

אפשר גם לפשט ולחשב את הגבול $\frac{(x-1)^2}{e^x-e} \to 0$ עם לופיטל אחד בלבד, כדי לקבוע שהגבול המקורי הוא $1\cdot 0\cdot 0 = 0$.

מי שבחר לחשב את כל הגבול באמצעות לופיטל הסתבכך שלא לצורך ונאלץ לגזור את x^x או את $e^{x\ln(x)}$.

פתרון לשאלה 8.5

נחלק לתחומים. כאשר $x > 1$ הפונקציה היא $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ ואילו כאשר $x < 1$ הפונקציה היא $f(x) = -\frac{x^2}{x-1}$. בנוסף, לפונקציה אסימפטוטה אנכית ב-$x = 1$ ומתקיים $\lim_{x\to1} f(x) = \infty$.

בתחום $x > 1$ מתקיים $f'(x) = \frac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$. הנגזרת חיובית כאשר $x > 2$ ושלילית כאשר $1 < x < 2$. לכן הפונקציה יורדת בתחום $1 < x < 2$ ועולה בתחום $x > 2$. הנקודה $x = 2$ היא נקודת מינימום מקומי.

באופן דומה, בתחום $x < 1$ מתקיים $f'(x) = -\frac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2} = -\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$. הנגזרת חיובית בתחום $0 < x < 1$ ושלילית כאשר $x < 0$. לכן הפונקציה יורדת בתחום $x < 0$, עולה בתחום $0 < x < 1$ והנקודה $x = 0$ היא מינימום (מוחלט).

שימו לב שהנגזרת מתאפסת רק ב-$x = 0, 2$, אבל בקטע $(0,2)$ יש תחום שבו הפונקציה עולה ותחום שבו הפונקציה יורדת.

הערה: רצוי להשוות את הפתרון הזה לפתרון של דוגמא 4.4.

פתרון לשאלה 8.6

נגזור לפי כל אחד מהמשתנים ונדרוש שהנגזרות יתאפסו באותה הנקודה:

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = 2x+2 = 0 \\ f'_y(x,y) = 6y = 0 \end{cases}$$

והנקודה היחידה בה שתי הנגזרות מתאפסות היא $(-1,0)$.

הנגזרות השניות הן: $f''_{xx}(x,y)=2$, $f''_{yy}(x,y)=6$ ו-$f''_{xy}(x,y)=0$, כך שמתקיים $\Delta_f(x,y)>0$ ולכן זו נקודת מינימום.

ניתן לראות זאת גם בלי נגזרות שניות, אם שמים לב שמתקיים

$$f(x,y)=(x+1)^2+3y^2-1$$

כעת נפתור עם האילוץ הנוסף. הלגרנז'יאן המתאים הינו

$$L(x,y,\lambda)=x^2+2x+3y^2+\lambda(x^2+y^2-3).$$

לכן

$$\begin{cases} L'_x(x,y,\lambda)=2x+2+2x\lambda=0 \\ L'_y(x,y,\lambda)=6y+2y\lambda=0 \\ L'_\lambda(x,y,\lambda)=x^2+y^2-3=0 \end{cases}$$

מהמשוואה השניה נקבל $y=0$ או $\lambda=-3$. במקרה הראשון, $y=0$ ולכן $x=\pm\sqrt{3}$ ושתי נקודות הקיצון הן $(\pm\sqrt{3},0)$. במקרה השני, $\lambda=-3$ ולכן $-4x+2=0$ כך ש $x=0.5$ לכן $y=\pm\sqrt{2.75}$.

לסיכום, ארבעת נקודות הקיצון הן $(\pm\sqrt{3},0)$ ו-$(0.5,\pm\sqrt{2.75})$.

שימו לב שיש להיזהר כשמבצעים מעברים אלגבריים דוגמת חלוקה ב-y (מאבדים את הפתרון $y=0$) והוצאת שורש (מאבדים את הפתרון שמתקבל מהשורש השלילי).