מערכי שיעור עבור אלגברה לינארית 1 (20109)

מבוסס על מערכי השיעור של ד"ר מרים רוסט

כתב: יבגני צודיקוביץ' (yevgets@gmail.com)

12 בפברואר 2019

מבנה החוברת

חוברת זו מבוססת על מערכי שיעור של ד"ר מרים רוסט בקורס אלגברה לינארית 1 (20109) של האוניברסיטה הפתוחה וכוללת הגדרות ומשפטים מרכזיים לצד תרגילים להמחשת החומר וכן תרגילים ממ"נים, ממ"חים ומבחנים. החוברת מבוססת על מחברת מערכי שיעור איתה הנחתי מספר קבוצות אולם לאורך הזמן המחברת צברה תיקונים, מחיקות וכתמי קפה. שכתוב ספרי הקורס היה הקש ששבר את גב הגמל והוביל להקלדת התרגילים וליצירת חוברת זו. באופן טבעי, גם חוברת זו לא שלמה וכוללת טעויות או תרגילים פחות מוצלחים. אני מזמין אתכם לשלוח לי כל הצעה לתיקון או שדרוג החוברת למייל yevgets@gmail.com.

החוברת מחולקת לפרקים בהתאם ליחידות הלימוד בספרי האוניברסיטה הפתוחה כאשר בטבלאות הבאות מצויה הצעה לחלוקת החומר בין מפגשי ההנחיה לאורך הסמסטר. בכל פרק יש הרבה יותר תרגילים מאשר ניתן להעביר במהלך המפגש ולכן חלק מהתרגילים סומנו כמתאימים לקבוצה המוגברת. ריבוי התרגילים מאפשר גמישות בהתאם לרמה של הסטודנטים ורמת המוכנות שלהם למפגש ובהתאם לשאלות המופיעות בממ"נים בכל סמסטר. מומלץ לעבור על חוברת הממ"נים לפני המפגש ולוודא לא לפתור במפגש שאלה שמופיעה בממ"נים (חלק מהשאלות לקוחות מממ"נים). יתרה מכך, החוברת נועדה בראש ובראשונה לשימוש במפגשים, ולכן אופן הכתיבה והעיצוב מאפשרים ניווט מהיר ונוח במהלך המפגש על חשבון הסברים ארוכים ומדוייקים שיבואו בעל פה.

חשוב לציין: החוברת נכתבה בראש ובראשונה עבורי כחוברת של מערכי שיעור. היא לא נועדה להחליף את ספרי הקורס והיא לא נועדה ללימוד עצמי. אמנם רוב התרגילים פתורים עד הסוף, אבל לא כולם. חלק מהתרגילים לא פתורים עד הסוף, ובחלקם הפתרון הוא רק בקווים כללים כאשר במפגש עצמו הכוונה היא להרחיב בעל פה.

סמסטר מוצלח,

יבגני

ותודה לדניאל צודיקוביץ על העזרה, העריכה וההגהה.

חלוקה מומלצת עבור קבוצה מוגברת

מפגש	חומר	עמ' בחוברת	הערות
1	פרק 1: שדות, n-יות והרעיון הכללי של דירוג	11	
2	פרק 1: פתרון מערכות לינאריות	22	
3	פרק 2: המרחב F^n	33	
4	פרק 3: מטריצות (עד 3.7)	45	
5	פרק 3: מטריצות הפיכות (3.8 והלאה)	54	
6	פרק 4: דטרמיננטות	62	פרק 5 - לימוד עצמי
7	פרק 6: שדה המרוכבים	74	
8	פרק 7: מרחבים לינאריים	87	
9	תחילת פרק 8: בסיס וממד	97	
10	סיום פרק 8: בסיס וממד	105	
11	פרק 9: טרנספורמציות לינאריות	110	
12	פרק 10: ייצוג ט"ל באמצעות מטריצות	110	
13	פרק 11: ערכים עצמיים ולכסון	130	
14	פרק 12: מכפלה סקלרית	142	

חלוקה מומלצת עבור קבוצה רגילה

מפגש	חומר	עמ' בחוברת	הערות
1	פרק 1: מערכות של משוואות לינאריות	11	ללא פעולות על n-יות וללא תכונות של פתרונות
2	פרק 2: המרחב F^n	33	
3	פרק 3: מטריצות	45	
4	פרק 4: דטרמיננטות	62	פרקים 5 ו-6: לימוד עצמי
5	פרקים 7-8: מרחבים לינאריים	87	
6	פרקים 9-10: טרנספורמציות לינאריות	110	
7	פרק 11: לכסון וערכים עצמיים	130	
8	פרק 12: מכפלה סקלרית וחזרה למבחן	142	

חלוקה מומלצת עבור קבוצה מוגברת בקיץ

הקצב בקיץ מעט מוגבר ביחס לסמסטר רגיל: 18 מפגשים של שעתיים (36 שעות) למול 14 מפגשים של 3 שעות (42 שעות).

מפגש	חומר	עמ' בחוברת	הערות
1	פרק 1: שדות, n-יות והרעיון הכללי של דירוג	11	
2	פרק 1: פתרון מערכות ליניאריות	22	
3	פרק 2: המרחב F^n עד וכולל בסיס	33	
4	פרק 2: תרגילים נוספים; פרק 3: הגדרת מטריצות	42	
5	פרק 3: שעה על מטריצות (עד 3.7) ומטריצות הפיכות	45	
6	פרק 3: המשך וסיום מטריצות הפיכות	54	
7	פרק 4: דטרמיננטות	62	פרק 5 - לימוד עצמי
8	פרק 4: שעה על $\det = 0$ ושעה על $\mathbb{C}$	70	חילוק פולינומים - לימוד עצמי
9	פרק 6: שורשים ב-$\mathbb{C}$ והגדרת מ"ל (עד 7.3.2)	74	
10	פרק 7: מרחבים ליניאריים	87	
11	תחילת פרק 8: בסיס וממד	97	
12	סיום פרק 8: בסיס וממד	105	
13	פרק 9: ט"ל עד פעולות על ט"ל	110	
14	פרק 9: פעולות על ט"ל	115	
15	פרק 10: ייצוג ט"ל באמצעות מטריצות	119	
16	פרק 11: ערכים עצמיים ולכסון עד ריבויים	130	
17	פרק 11: ריבויים ושאלות על לכסון ודימיון	135	
18	פרק 12: מכפלה סקלרית	142	

תוכן העניינים

פתיחה

פתיחה טכנית (לזום)

- תוכנה לניהול מפגשים חיים. המפגשים המוקלטים והמצגת יופיעו באתר כעבור יום-יומיים ולכן כדאי להקשיב ולא לרשום. המצגות יופיעו באתר.
- אם יש שאלות - מומלץ לרשום בצ'ט בצד ואני אענה עליהן תוך כדי ההסברים. יכולים להשתמש בצ'ט גם כדי לדבר ביניכם. הצ'ט לא מוקלט.
- אם רוצים לדבר - הרימו יד ואפנה אליכם. בשאר הזמן - המיקרופון שלכם צריך להיות סגור.
- תשאלו שאלות!
- הפסקות
- יש עוד הקלטות מסמסטרים קודמים, גם מוגברים וגם מוקלטים. תרגישו חופשי להתקדם.

פתיחה מנהלית

- למי זהו הקורס הראשון באו"פ?
- אני המנחה, לא המרצה. ההנחיה היא לא תחליף לספרים ויש לקרוא אותם לפני המפגש ולענות על שאלות. המפגש הראשון קצת יותר מפורט.
- מטרת המפגש: להבהיר נקודות חשובות, לענות על שאלות שמתעוררות ולפתור תרגילים.
- דרכי התקשרות (לכתוב פרטים על הלוח):
  - מייל.
  - שעת הנחיה טלפונית: ______________________.
  - הנחייה פרטנית.
  - אתר ופורום. שם מתפרסמים תיקונים לממ"נים ופתרונות.
  - חשוב לקרוא את מכתב הפתיחה המופיע באתר וכולל את ההנחיות!
- ממ"נים:
  - 3 צורות הגשה לפי סדר עדיפות: ידנית במפגש, דואר, מערכת המטלות.
  - אם מגישים במערכת המטלות עדיף להגיש רק קובץ וורד עם טקסט, לא דפים סרוקים. אם דפים סרוקים - קובץ אחד וכאסמכתא לשליחה בדואר.

- ככלל, אין דחיות. מקרים חריגים - לפנות למרכזת ההוראה.

○ ממ"חים:

- הגשה בשאילת"א.
- לא להקל ראש. לא צריך דרך אבל כדאי לפתור כל שאלה כאילו היא שאלה בממ"ן - להוכיח או למצוא דוגמא נגדית. מדובר על שאלות "אמיתיות".

○ מומלץ לפתור אחרי כל מפגשים את כל התרגילים בממ"ן ובממ"ח שעוסקים בחומר שעברנו עליו כהכנה לחומר הבא.

פתיחה אקדמית

○ בקורס יש פרק הכנה ו-12 פרקים ב-3 כרכים + כרך הכנה. בקבוצה המוגברת לא נדבר על פרק 5, ברגילה לא נדבר על פרקים 5 ו-6.

○ כרך ההכנה הוא רקע מתמטי כללי. אנחנו לא נעבור עליו במפגשים אבל חשוב שתעברו עליו ותוודאו שאתם מכירים. כרגע: תורת הקבוצות, אינדוקציה ובינום ניוטון (פרקים I,IV,V).

○ הקורס הוא רציף - כל פרק נבנה על הפרקים הקודמים ולכן חשוב להתקדם בקצב המתאים. אי אפשר לדלג קדימה ולהשלים אח"כ.

○ באתר יש בחנים על יחידות ללא ציון. מומלץ לעבור עליהם כתרגול נוסף.

○ חשוב לעבור על השאלות שיש בספרים. הן חלק מהחומר ומכילות תוצאות חשובות.

○ במבחן: 3 הכרכים ומחשבון מדעי פשוט. חשוב להכיר אותם היטב כולל שאלות ותשובות ומותר בממ"נים ובמבחן להסתמך רק על כל מה שמוכח בספר כמשפט או שאלה.

○ חומר רשות - שימו לב לפרקי הרשות בספרים.

1 מערכות משוואות לינאריות

1.1 שדות

שדה הוא מבנה מתמטי המהווה הפשטה של מבנה מוכר: מספרים ממשיים עם פעולת הכפל והחיבור ביניהם $(\mathbb{R},+,\cdot)$. חקר המבנה הכללי יותר יאפשר לקבל תובנות גם על הממשים וגם על מבנים מתמטיים דומים.

הגדרה (1.2.1). שדה מורכב מקבוצה F ופעולת חיבור (תסומן ב-$+$) וכפל (תסומן ב-$\cdot$) המקיימת את התכונות הבאות:

1. סגירות: לכל $a,b\in F$ גם $a+b,ab\in F$.
2. קיבוציות: לכל $a,b,c\in F$ מתקיים

$$(a+b)+c=a+(b+c)=a+b+c$$

וגם

$$(ab)c=a(bc)=abc$$

(ולכן מוותרים על הסוגריים).

3. חילופיות: לכל $a,b\in F$ מתקיים $a+b=b+a$ וגם $ab=ba$.
4. קיום איברים נייטרליים: קיימים **איברים שונים** שנסמנם $0,1\in F$ כך ש:
   - 0 הוא הנייטרלי לחיבור: $a+0=a$ לכל $a\in F$.
   - 1 הוא הנייטרלי לכפל: $1a=a$ לכל $a\in F$.
5. קיום איברים הפיכים:
   - איבר נגדי לחיבור: לכל $a\in F$ קיים $b\in F$ כך ש $a+b=0$.
   - איבר הופכי לכפל: לכל $a\neq 0\in F$ קיים $b\in F$ כך ש $ab=1$.
6. פילוג הכפל מעל החיבור (פתיחת סוגריים): לכל $a,b,c\in F$ מתקיים $a(b+c)=ab+ac$.

כל מבנה המקיים תכונות אלו מקיים תכונות נוספות רבות הנגזרות מהן ומוכרות לנו ממספרים ממשיים. למשל:

- יחידות האיברים הנייטרליים, הנגדיים וההופכיים.
- $0x = 0$ לכל x.
- אם $ab = 0$ אז $a = 0$ או $b = 0$ (משפט 1.2.6). בהמשך נראה מבנים מתמטיים בהם התכונה הזו לא מתקיימת.

תרגיל 1.1. נגדיר על $\mathbb{R}$ את הפעולות הבאות:

$$\begin{aligned} a * b &= ab - 1 \\ a \oplus b &= a + b - ab \end{aligned}$$

עבור כל פעולה - האם היא חילופית? האם קיים איבר נייטרלי? אם כן, בדקו האם כל $x \in \mathbb{R}$ הפיך ורשמו את האיבר ההפכי.

פתרון:

1. הפעולה חילופית כי כפל רגיל הוא חילופי: $a * b = ab - 1 = ba - 1 = b * a$.
לא קיים איבר נייטרלי. אנחנו מחפשים $e \in \mathbb{R}$ כך שלכל $x \in \mathbb{R}$ יתקיים $x * e = x$ כלומר $xe - 1 = x$ ולכן $x(e-1) = 1$. אבל המשוואה הזו לא מתקיימת עבור $x = 0$ למשל ולכן אין נייטרלי.
2. הפעולה חילופית: $a \oplus b = a + b - ab = b + a - ba = b \oplus a$.
נחפש איבר נייטרלי: אנחנו מחפשים $e \in \mathbb{R}$ כך שלכל $x \in \mathbb{R}$ יתקיים $x \oplus e = x$ כלומר $x + e - xe = x$ ולכן $e - xe = 0$. בבירור $e = 0$ יקיים את המשוואה לכל x ולכן זהו הנייטרלי.
אנחנו מחפשים הופכיים, כלומר לכל $x \in \mathbb{R}$ מחפשים $y \in \mathbb{R}$ כך ש- $x \oplus y = 0$ כלומר $x + y - xy = 0$.
נחלץ את y: $y = \frac{x}{x-1}$ ועבור $x = 1$ נקבל סתירה. לכן כל האיברים ב-$\mathbb{R}$ הפיכים פרט ל-1 וההפכי הוא $\frac{x}{x-1}$.

דוגמה. לשדות:

1. $\mathbb{R}$ עם החיבור והכפל הרגילים - זהו שדה.
2. $\mathbb{Q}$ עם החיבור והכפל הרגילים - זהו שדה.
3. $\mathbb{N}$ עם החיבור והכפל הרגילים - זהו לא שדה, למשל אין נגדי לחיבור.
4. מהגדרת השדה לא מתחייב שיש אינסוף איברים בקבוצה. למשל, נסתכל על הקבוצה $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ עם חיבור וכפל המוגדרים להלן:

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

פעולות אלו הן חיבור וכפל מודולו 2. הקבוצה עם הפעולות הללו מהווה שדה וזהו השדה הקטן ביותר האפשרי ("למה?").

באופן כללי, ב- $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, ..., p-1\}$ הפעולות מוגדרות על ידי השארית של הפעולה הרגילה בין המספרים השלמים כשמחלקים את התוצאה ב-p:

- $a +_p b = (a + b) \mod p$
- $a \cdot_p b = (ab) \mod p$

רק מוגברת

למשל ב-$\mathbb{Z}_7$:

- $4 +_7 6 = 3$ כי זו השארית בחלוקת הסכום ב-7 ($4 + 6 = 10 = 7 + \boxed{3}$).
- $4 \cdot_7 6 = 24 = 3 \cdot 7 + \boxed{3}$ ושוב 3 היא השארית.

בפרק 5 עוסקים בפעולות הללו בפירוט עם כל ההוכחות והמשפטים. כמו כן מוכיחים ש-$\mathbb{Z}_p$ הוא שדה רק עבור p ראשוני. מה שחשוב עכשיו זה להבין איך לבצע את החישובים הבסיסיים.

1.1.1 חיסור וחילוק

הגדרנו רק פעולת חיבור וכפל. פעולות החיסור והחילוק אינן נכללות בהגדרת השדה אבל ניתן להגדיר אותן לשם פישוט:

- חיסור = חיבור של הנגדי.
- חילוק = כפל בהופכי.

תרגיל 1.2. חשב ב-$\mathbb{Z}_5$ את הביטויים הבאים: $\alpha = 2 \cdot 3 + 2^2 + 1$; $\beta = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4}$

פתרון: נחשב ישירות לפי ההגדרה: $\alpha = 2 \cdot 3 + 2^2 + 1 = 1 + 4 + 1 = 0 + 1 = 1$
ההפכי של 2 הוא 3 (כי $2 \cdot 3 = 5 + \boxed{1}$), ההפכי של 3 הוא 2 וההפכי של 4 הוא 4. לכן:

$$\beta = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 3 + 4 + 2 = 4$$

תרגיל 1.3. מצאו את כל השלשות הפיתגוריות ב- $\mathbb{Z}_3$, כלומר כל השלשות המקיימות $x^2 + y^2 = z^2$. רק מוגברת

פתרון: נשים לב שיש 3 אפשרויות לכל משתנה לכן בסה"כ 27 שלשות שונות, לאו דווקא פיתגוריות. אפשר פשוט לבדוק את כולן (למעשה כך אפשר לפתור כל משוואה בשדה סופי), אבל עם קצת תחכום אפשר לקצר את הבדיקות.

נתחיל מחישוב הריבועים בשדה זה: $0 \cdot 0 = 0, 1 \cdot 1 = 1, 2 \cdot 2 = 1$ לכן רק 1 או 0 יכולים להיות ריבוע של מספר ב-$\mathbb{Z}_3$.

- הפתרון הטריויאלי: $(0,0,0)$
- אם $x=0$ אז בהכרח $y^2=z^2$. אם $y=1$ אז $z^2=1$ כלומר $z=\pm1=1,2$ (הערה חשובה: בודקים את זה בחישוב ישיר! אין פעולה של הוצאת שורש בשדה סופי).

אם $y=2$ אז $z=\pm1$ באופן זהה. לכן יש לנו עוד 4 שלשות פיתגוריות: $(0,2,1),(0,2,2),(0,1,1),(0,1,2)$.

- באופן דומה אם $y=0$ יש לנו עוד ארבע שלשות $(2,0,1),(1,0,2),(2,0,2),(1,0,1)$.
- אם $x,y\neq0$ אז באגף שמאל רשומים שני מספרים שהריבוע שלהם הוא 1, ולכן סכומם הוא 2. אבל למשוואה $z^2=2$. אין פתרון.
- לכן יש בסה"כ 9 שלשות פיתגוריות ב-$\mathbb{Z}_3$ ובכולן לפחות אחד הגורמים צריך להיות אפס.

תרגיל 1.4. האם הקבוצה $A=\{a,b,c\}$ היא שדה עם הפעולות: רק מוגברת

$+$	a	b	c
a	c	a	b
b	a	b	c
c	b	c	a

$\cdot$	a	b	c
a	b	b	a
b	b	b	b
c	a	b	c

פתרון: לא. נשים לב כי מתקיים לכל $x\in A$: $cx=x$ לכן אם A הייתה שדה, c היה איבר היחידה ביחס לכפל.

לפי הגדרת השדה, לכל איבר פרט לאיבר האפס יש הופכי ביחס ליחידה אך אנו רואים שגם ל-a וגם ל-b אין הופכי, ובהכרח אחד מהם אינו איבר האפס ולמרות זאת אינו הפיך.

תרגיל 1.5. האם $\mathbb{R}$ הוא שדה עם הכפל הרגיל ועם חיבור המוגדר על ידי: רק מוגברת

1. $a\oplus b=a+2b$
2. $a\oplus b=a+b+ab$

פתרון:

1. זהו לא שדה כי החיבור החדש לא חילופי: $1\oplus2=1+4=5\neq4=2+2=2\oplus1$

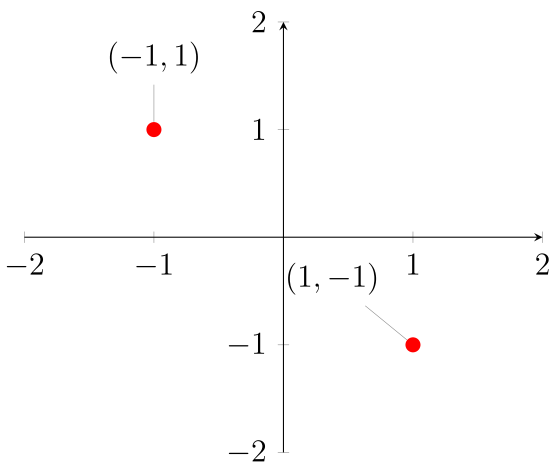
2. הכפל הוא אותו כפל לכן נשאר לנו לבדוק את התכונות העוסקות בחיבור.
קל לראות שהחיבור הזה חילופי לכן נבדוק קיום איבר יחידה ואיברים נגדיים (קיבוציות ופילוג הן תכונות לא נוחות לבדיקה כי יש בהן 3 איברים שונים).
ראשית, נחפש איבר נייטרלי. אנחנו מחפשים $e \in \mathbb{R}$ שיקיים $a \oplus e = a$ לכל $a \in \mathbb{R}$. לכן הדרישה היא $a + e + ae = a$ ולכן $e(1 + a) = 0$. משוואה זו צריכה להתקיים לכל a ולכן בהכרח $e = 0$ הוא הנייטרלי.
נבדוק קיום נגדיים ביחס לנייטרלי זה (חשוב קודם למצוא נייטרלי ואז לחפש נגדי, לא להניח מיד ש-0 הוא הנייטרלי!). יהי $a \in \mathbb{R}$ ונחפש $b \in \mathbb{R}$ המקיים $a \oplus b = e = 0$. לכן $a + b + ab = 0$ כלומר $b(1 + a) = -a$. נשים לב שאם נציב $a = -1$ אגף שמאל יתאפס ואילו אגף ימין לא ונקבל סתירה לכל b. לפיכך, ל--1 אין נגדי וזהו לא שדה.

דומה לתרגיל 1.1, אפשר לוותר על חישוב הנייטרלי

1.2 n-יות

הגדרה. זוג סדור: (x, y) כאשר הסדר בו הם מופיעים משנה (ייתכן והאיברים זהים).
(בניגוד לקבוצה שבה הסדר לא משנה ואיברים שחוזרים על עצמם לא נחשבים.)
למשל: $(1, -1) \neq (-1, 1)$

אפשר גם לדלג ולעבור לעמוד 17



באותו אופן מגדירים שלשה סדורה, רביעיה סדורה ובאופן כללי, n-יה סדורה: רשימה של n איברים כאשר הסדר משנה:

$$\underline{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$$

כאשר מתקיים $a_i \in F$ לכל i, F שדה.

כמו כן, מגדירים את קבוצת כל ה-nיות על ידי

$$F^n = \{\underline{a} = (a_1, a_2, ..., a_n) | a_i \in F\}$$

מקרה פרטי כאשר $F = \mathbb{R}$. במקרה כזה $\mathbb{R}^2$ הוא המישור הדו ממדי שציירנו, $\mathbb{R}^3$ הוא המרחב התלת מימדי ולשאר החזקות אין ייצוג גאומטרי פשוט לשרטוט.

למספרים ב-F אנחנו פשוט נקרא "סקלרים" ולרוב לא נתייחס אל קבוצה זו בתור F^1.

***משפט* (1.3.1).** *שוויון n-יות.*

$\underline{a} = (a_1, ..., a_n) \in F^n$ ו- $\underline{b} = (b_1, ..., b_m) \in F^m$ שווים ($\underline{a} = \underline{b}$) אם"ם:

- הסדר שלהן זהה ($m = n$)

וגם

- לכל $1 \leq i \leq n$ מתקיים $a_i = b_i$.

<u>פעולות על n-יות</u>

הגדרה (1.3.2). חיבור לכל $\underline{a}, \underline{b} \in F^n$ מגדירים $\underline{a} + \underline{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n) \in F^n$ - כלומר סוכמים איבר-איבר.

למשל: $(1, -1) + (-1, 1) = (1 - 1, -1 + 1) = (0, 0) = \underline{0}$.

הערה. אנחנו נשתמש בסימון $\underline{0}$ עבור n-יה שכל איבריה אפסים, כאשר אנחנו מניחים שה-n ברור מההקשר.

תכונות:

- חילופיות: $\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$.
- קיבוציות: $(\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c} = \underline{a} + (\underline{b} + \underline{c}) = \underline{a} + \underline{b} + \underline{c}$.
- וקטור האפס: $\underline{a} + \underline{0} = \underline{a}$.
- כלל הצמצום: $\underline{a} + \underline{b} = \underline{a} + \underline{c} \Leftarrow \underline{b} = \underline{c}$.

הגדרה (1.3.4). <u>כפל בסקלר</u> לכל $\lambda \in F$, $\underline{a} \in F^n$: $\lambda\underline{a} = (\lambda a_1, ..., \lambda a_n) \in F^n$ -כלומר כופלים את הסקלר בכל אחד מהאיברים.

תכונות:

- $0\underline{a}=\underline{0}, 1\underline{a}=\underline{a}$.
- **קיבוציות:** $\lambda(\mu\underline{a})=(\lambda\mu)\underline{a}=\lambda\mu\underline{a}$.
- **פילוג כפל מעל חיבור:** $\lambda(\underline{a}+\underline{b})=\lambda\underline{a}+\lambda\underline{b}$.
- **פילוג חיבור מעל הכפל:** $(\lambda+\mu)\underline{a}=\lambda\underline{a}+\mu\underline{a}$.

שאלה: "האם F^n עם החיבור והכפל כפי שהוגדרו כאן מהווה שדה?"

תשובה: לא! אמנם החיבור מתאים לדרישות בהגדרת השדה אבל הכפל צריך להיות בין איברי F^n ולא בין n-יה לסקלר.

נדבר הרבה על מבנה זה הכל מפרק 2.

1.3 מערכות משוואות לינאריות

הגדרה. משוואה לינארית ב-n נעלמים מוגדרת כמשוואה שבה כל הנעלמים מופיעים בחזקת 1 או שלא מופיעים כלל, לא נכפלים זה בזה ולא בתוך פונקציות אחרות.

דוגמה. :

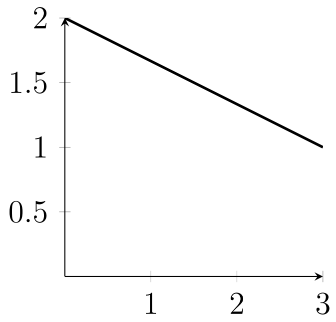
- $x+|y|=3$ - לא.
- $x+3y=6$ כן.
- $x-\sin y=10$ לא.
- $xy+z=0$ לא.

נסתכל על המשוואה הלינארית $x+3y=6$. כדי לפתור אותה נחלץ את y: $y=-\frac{1}{3}x+2$. המשתנה x נקרא משתנה חופשי והמשתנה y נקרא משתנה קשור. נסמן $x=t\in\mathbb{R}$. לכן כל זוג סדור מהצורה $(t,-\frac{t}{3}+2)$ פותר את המשוואה. ביטוי כזה נקרא הפתרון הכללי של המשוואה. נגדיר את קבוצת כל הפתרונות האפשריים על ידי

$$S=\left\{\left(t,-\frac{1}{3}t+2\right)|t\in\mathbb{R}\right\}$$

"שאלה: כיצד נראית קבוצת הפתרונות?"

תשובה: קו ישר:



הגדרה. <u>מערכת משוואות</u> היא מערכת של מספר משוואות לינאריות עם אותם הנעלמים.

דוגמה.

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 5 \\ -x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

זו מערכת של 2 משוואות ב-3 נעלמים. אנחנו מחפשים את כל השלשות הסדורות שפותרות את שתי המשוואות <u>בו זמנית</u>. במקרה הזה: $\left(0, -\frac{5}{4}, \frac{5}{4}\right)$ (אבל ייתכנו עוד פתרונות).

מערכת של n משוואות ב-m נעלמים יכולה להופיע בהרבה צורות אבל אם זו מערכת משוואות לינארית אפשר אחרי קצת אלגברה להגיע תמיד לצורה הבאה:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_{12} + ... + a_{1m}x_m = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

כאשר a_{ij} הוא המקדם של המשתנה x_j במשוואה ה-i ו-b_i הוא המקדם החופשי במשוואה ה-i.

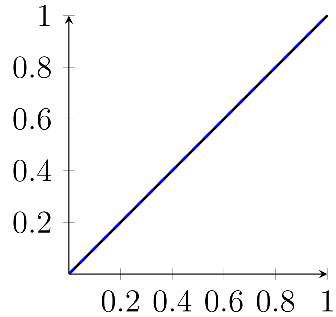
"<u>שאלות:</u> האם לכל מערכת משוואות יש פתרון? כמה פתרונות יש לכל מערכת? איך לחשב אותם?"

דוגמה. נסתכל במקרה פרטי $n = m = 2$:

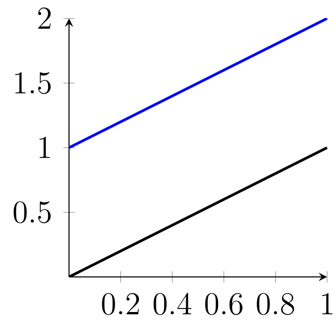
$$\begin{cases} ax + by = c & : S \\ a'x + b'y = c' & : S' \end{cases}$$

כמקודם, הפתרון של כל משוואה (בנפרד) היא קו ישר המסומן ב-S, S' בהתאמה. בין שני ישרים במישור ייתכנו 3 מצבים הדדיים:

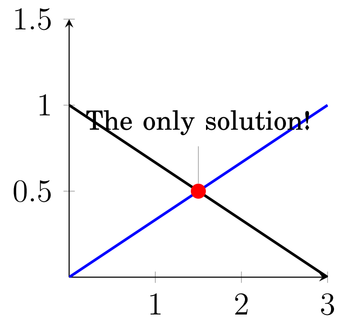
1. שווים - כל נקודה על הישר (זה אותו הישר) פותרת את שתי המשוואות - אינסוף פתרונות!



2. מקבילים - אין אף נקודה משותפת ואין זוג סדור שפותר בו זמנית את שתי המשוואות - אין פתרון!



1. נחתכים בנקודה אחת - זו הנקודה היחידה שפותרת גם את המשוואה הראשונה וגם את השנייה - פתרון יחיד!



אנחנו נראה שמצב זה נכון לכל מערכת משוואות לינארית מעל שדה אינסופי: או שיש פתרון יחיד, או שיש אינסוף או שאין פתרון כלל.
מעל שדות סופיים לא ייתכן מצב של אינסוף פתרונות (כי אין אינסוף n-יות) אלא ייתכן מצב של 2 פתרונות, 3 פתרונות וכד'.

1.3.1 שיטת החילוץ של גאוס

הרעיון: מחפשים שיטה לפתרון מערכות של משוואות שתהיה סיסטמטית, תעבוד תמיד ותהיה פשוטה. התהליך יהיה העברה של מערכת המשוואות מהצורה הנתונה לצורה פשוטה יותר שהיא יותר קלה לפתרון, מבלי שאנחנו משנים את קבוצת הפתרונות. מערכות משוואות כאלו נקראות "מערכות שקולות".

הגדרה. פעולות אלמנטריות

1. החלפת שורות $R_i \leftrightarrow R_j$.
2. כפל משוואה בקבוע $c \neq 0$: $R_i \to cR_i$ ("למה שונה מ-0?")
3. להוסיף למשוואה כפולה של משוואה אחרת: $R_i \to R_i + cR_j$ כאשר $i \neq j$. ("האם $c \neq 0$ בהכרח?").

משפט* (1.7.3). *ביצוע פעולות אלמנטריות מעביר את מערכת המשוואות למערכת משוואות שקולה לה (לא משנה את קבוצת הפתרונות).

דוגמה. נסתכל על המערכת:

$$\begin{cases} x+y+z & =6 \\ x+2y+2z & =11 \\ 2x+3y-4z & =3 \end{cases}$$

מערכת המשוואות הזו שקולה למערכת אחרת שהרבה יותר קל לפתור אותה:

$$\begin{cases} x=1 \\ y=3 \\ z=2 \end{cases}$$

למערכת השנייה בבירור יש פתרון יחיד וקל למצוא אותו. לכן המטרה שלנו היא להגיע מהצורה הראשונה לשניה על ידי פעולות אלמנטריות.

מכיוון שרק המקדמים הם החשובים ולא המשתנים או שמותיהם, אנחנו נרשום רק אותם. כתיב כזה נקרא "כתיב מטריצי (מטריציוני)":

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 11 \\ 2 & 3 & -4 & 3 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x & y & z & free \end{array}\right)$$

פתרון:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 11 \\ 2 & 3 & -4 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -6 & -9 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_2]{R_1 \to R_1 - R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -7 & -14 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to -\frac{1}{7} R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

והגענו למטריצה שמייצגת את מערכת המשוואות שרשמנו למעלה ולכן זהו אכן פתרונה ויש לה פתרון יחיד.

בדיקה: מומלץ לבדוק את הפתרון על ידי הצבתו במערכת המקורית!

שיטה כללית:

1. לוודא ש-$a_{11} = 1$. איפוס כל מה שמתחתיו בעמודה על ידי חיסור R_1 ממנו. מקבלים עמודה: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. אם x_2 מופיע בשורה השניה - דואגים ל-$a_{22}=1$ ואיפוס כל שאר האיברים בעמודה: $\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\dots\\0\end{pmatrix}$. אחרת - נחליף שורות כך ש-x_2 יופיע בשורה השניה. אם זה בלתי אפשרי (כל המקדמים הם 0) - עוברים ל x_3.
3. ממשיכים למשתנים הבאים וחוזרים על התהליך.

הגדרה. :

1. איבר פותח - האיבר הראשון השונה מאפס בשורה מסוימת.
2. מטריצת מדרגות היא מטריצה בה:
   א) כל שורת אפסים נמצאת מתחת לכל השורות שאינן שורות אפסים.
   ב) האיבר הפותח של כל שורה נמצא מימין לאיבר הפותח של השורה שמעליו.
3. מטריצת מדרגות קנונית היא מטריצה מדרגות שבה כל האיברים הפותחים הם 1 ובעמודה של כל איבר פותח שאר האיברים הם אפסים.

דוגמה. מטריצת מדרגות: (לשרטט מדרגות)

$$\left(\begin{array}{cccc|c}0 & \boxed{1} & 0 & 5 & 3\\ 0 & 0 & \boxed{7} & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \boxed{3} & 7\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

מטריצת מדרגות קנונית:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}\boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 5\\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

בתהליך הדירוג אנחנו מנסים להגיע למטריצת מדרגות (קנונית)!

תרגיל 1.6. פתור את — רק מוגברת

$$\begin{cases} x_3 - x_4 - x_5 &= 4 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 2x_5 &= 4 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 3x_5 &= 4 \\ 3x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 3x_4 + 6x_5 &= 6 \end{cases}$$

פתרון: נעבור לכתיב מטריצי ונבצע $R_1 \leftrightarrow R_4$:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 6 & 6 & 3 & 6 & 6 \\ 2 & 4 & 2 & 4 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{3}R_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 4 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 4 \end{array}\right)$$

אין איבר פותח עבור המשתנה x_2 ולכן מדלגים למשתנה x_3 ונבצע גם $R_2 \to -\frac{1}{2}R_2$:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[R_4 \to R_4 - R_2]{R_3 \to R_3 + R_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_4 \to -\frac{1}{2}R_4]{R_1 \to R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \to R_2 - R_3]{R_3 \leftrightarrow R_4} \left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

כל איבר פותח מתאים למשתנה קשור ולכן יש 3 משתנים קשורים: x_1, x_3, x_5 ושני משתנים חופשיים: x_2, x_4. מערכת המשוואות השקולה היא

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_4 & = 2 \\ x_3 - x_4 & = 2 \\ x_5 & = -2 \end{cases}$$

לכן יש אינסוף פתרונות וקבוצת הפתרונות (הפתרון הכללי) היא:

$$S = \{(2 - 2t - 3s, t, 2 + s, s, -2) | s, t \in \mathbb{R}\}$$

דרך אחרת לרשום את הפתרון הכללי היא לפרקו לצירוף לינארי של וקטורים:

$$(2, 0, 2, 0, -2) + t(-2, 1, 0, 0, 0) + s(-3, 0, 1, 1, 0)$$

תרגיל 1.7. פתור את מערכת המשוואות

$$\begin{cases} x - 2y & = 3 \\ 5x + y & = 1 \\ 3x + 5y & = 9 \end{cases}$$

פתרון: נעבור לכתיב מטריצי:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_3-3R_1]{R_2\to R_2-5R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 11 & -14 \\ 0 & 11 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to R_3-R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 11 & -14 \\ 0 & 0 & 14 \end{array}\right)$$

השורה האחרונה היא שורת סתירה כי המשוואה אותה היא מייצגת היא $0x + 0y = 14$ ובבירור אין אף זוג סדור שמקיים אותה ולכן למערכת המשוואות אין פתרון.

1.3.1.1 סיכום שיטת הדירוג

1. עוברים לכתיב מטריצי.
2. מדרגים את המטריצה.
3. אם במהלך הדירוג הגענו לשורת סתירה $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \dots & 0 & \beta\neq 0 \end{array}\right)$ - אין פתרון למערכת.
4. אחרת - מגיעים למטריצת מדרגות.
   א) אם בכל עמודה יש איבר פותח - יש פתרון יחיד.
   ב) אחרת - בעמודות בהן אין איברים פותחים יש משתנים חופשיים, בעמודות האחרות יש משתנים קשורים ולמערכת "אינסוף פתרונות" (בשדה סופי - מספר סופי של פתרונות - n^k כאשר k מספר המשתנים החופשיים ו-n מספר האיברים בשדה).
5. בד"כ נרצה למצוא את הפתרון היחיד או את הצורה הכללית של אינסוף הפתרונות.

הערה.

1. השיטה עובדת תמיד!
2. חשוב להקפיד על הסדר ולא לקלקל אפסים שכבר נוצרו.
3. חייבים לבצע תמיד את הפעולות עם הגרסא העדכנית ביותר של השורה:
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2\to R_2-4R_1]{R_1\to R_1-\frac{1}{4}R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 3/4 & 3/2 \\ 0 & -3 & -6 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x\in\mathbb{R} \end{cases}$$
4. מומלץ להימנע מעבודה עם שברים. למשל, בתרגיל **1.6** ניתן היה לבצע $R_1 \to R_1 - R_2$ במקום $R_1 \to \frac{1}{3}R_1$.
5. כאשר עובדים מעל שדה אחר מהממשיים, יש לבצע את כל הפעולות מעל שדה זה!

תרגיל 1.8. פתור ב-$\mathbb{Z}_5$ את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} x+2z &= 1 \\ 2x+2y+z &= 4 \\ x+3y+4z &= 0 \end{cases}$$

פתרון: נעבור לכתיב מטריצי ונפתור, אך נזכור כי הפעולות הן ב-$\mathbb{Z}_5$!

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_3-R_1]{R_2\to R_2-2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to \frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to R_3-3R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

יש 3 איברים פותחים ולכן יש פתרון יחיד. נמצא אותו.

מהמשוואה השלישית מקבלים $4z = 1$ כלומר $z = 4$ (כי $4\cdot 4 = 15 + \boxed{1}$).

נציב במשוואה השנייה ונקבל: $y + 4 = 1$ ולכן $y = -3 = 2$.

נציב במשוואה הראשונה ונקבל: $x = 1 - 2\cdot 4 = -7 = -2 = 3$. **מומלץ - בדיקה!**

"שאלה: האם ניתן היה לדרג את המשוואות כרגיל (ב-$\mathbb{R}$) ורק בסוף להמיר את הפתרונות ל-$\mathbb{Z}_5$?"

תשובה: לא תמיד. למשל - כפל ב-5 במהלך הפתרון הפתרון זה כמו כפל ב-0 וחילוק ב-5 בכלל לא מוגדר! לכן עדיף לעבוד בזהירות בשדה הנכון.

דוגמה. נפתור ב-$\mathbb{Z}_3$ את: $\begin{cases} x+2y &= 1 \\ 2x+y &= 2 \end{cases}$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2-2R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_1\to R_1-2R_2]{R_2\to -\frac{1}{3}R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

ולכן יש פתרון יחיד: $x = 1; y = 0$ אבל! חילקנו ב-3 וזה לא חוקי. בפועל השורה השניה היא שורת אפסים ולכן יש "אינסוף" פתרונות.

תרגיל (המשך תרגיל 1.8)**.** נניח שאחרי הדירוג מחליפים את השורה האחרונה בשורת אפסים. כמה פתרונות יש למערכת?

פתרון: נרשום את המטריצה החדשה:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

יש 2 איברים קשורים ומשתנה חופשי לכן יש "אינסוף פתרונות", אבל אנחנו בשדה סופי ולכן יש מספר סופי של פתרונות. נסמן $z = t$ ולכן $y = 1 - t$ ו-$x = 1 - 2t$ וקבוצת הפתרונות היא

$$\{(1-2t, 1-t, t) | t \in \mathbb{Z}_5\}$$

במקרה הזה אפשר לרשום את כל הפתרונות בצורה מפורשת:

$$\{(1,1,0), (4,0,1), (3,4,2), (0,3,3), (3,2,4)\}$$

באופן טבעי יש 5 פתרונות כי כשיש פרמטר יש לו 5 אפשריות ב-$\mathbb{Z}_5$.

1.4 מערכת משוואות עם פרמטרים

הפעם חלק מהמקדמים הם פרמטרים והמטרה היא למצוא את כמות הפתרונות (ומהם) כתלות בפרמטר.

תרגיל 1.9. עבור אילו ערכי a למערכת הבאה:

$$\begin{cases} x - 3z & = -3 \\ 2x + ay - z & = -2 \\ x + 2y + az & = 1 \end{cases}$$

יש 1. פתרון יחיד. 2. אינסוף פתרונות. 3. אין פתרון.

כאשר יש פתרונות - מצא אותם.

פתרון: נעבור לכתיב מטריצי:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 2 & a & -1 & -2 \\ 1 & 2 & a & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_3-R_1]{R_2\to R_2-2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & a & 5 & 4 \\ 0 & 2 & a+3 & 4 \end{array}\right)$$

עקרונית, היינו רוצים לחלק את המשוואה השנייה ב-a אבל זה ייצר שברים בהם הפרמטר במכנה וגם מה אם $a=0$? לכן נשתדל להימנע מפעולות שמגבילות את הערכים של a (כי אחרת נצטרך לחזור ולבדוק מה קורה בערכים אלו...) ונחליף שורות:

$$\xrightarrow{R_3\leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & a+3 & 4 \\ 0 & a & 5 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to\frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & \frac{a+3}{2} & 2 \\ 0 & a & 5 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to R_3-aR_2}$$

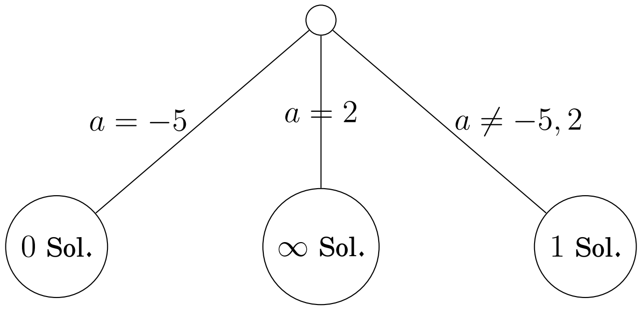
"האם בפעולה האחרונה יש הגבלה כלשהי על a?"

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & -3 & -3 \\ 0 & \boxed{1} & \frac{a+3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & \frac{10-a^2-3a}{2} & 4-2a \end{array}\right)$$

קיבלנו בוודאות 2 איברים פותחים ו-3 משתנים.

1. פתרון יחיד:
כאשר יש 3 איברים פותחים יש פתרון יחיד. לכן נדרוש $10-a^2-3a\neq 0$ כלומר $a\neq -5,2$.
הפתרון במקרה זה הינו $z=-\frac{4}{a+5}$, $y=2+2\frac{a+3}{a+5}$ ו-$x=-3-\frac{12}{a+5}$
2. אינסוף פתרונות:
כאשר יש פחות מ-3 איברים פותחים ואין שורת סתירה יש אינסוף פתרונות. במקרה הזה אנו נדרוש $10-a^2-3a=0$ וגם $4-2a=0$ ולכן $a=2$.
לכן z הוא משתנה חופשי והפתרון הכללי יהיה $(-3+3t, 2-2.5t, t)$.
3. אין פתרון כאשר יש שורת סתירה. זה יתקבל כאשר $a=-5$.

דרך נוחה להציג את הפתרון היא באמצעות עץ:



עצים נוחים במיוחד כאשר ישנם 2 פרמטרים ורוצים לוודא שכל האפשרויות נבדקו.

הערה.

1. דרך טובה היא קודם כל לבדוק מתי יש מצב של פתרון יחיד. אחרי זה, לבדוק אחד-אחד את כל הערכים שלא מובילים לפתרון יחיד.
2. בסופו של דבר כל ערך ממשי צריך להתאים לאיזושהי קטגוריה.
3. אם מבצעים פעולה שמגבילה את הפרמטר, צריך לחזור למטריצה לפני הפעולה, להציב את הערך של הפרמטר שהגבלנו ולהמשיך לפתור.
4. מה שבודקים זה איברים פותחים, לא האם יש או אין שורת אפסים.
5. אם הצבה בפרמטר מאפסת כמה איברים פותחים בו זמנית - המערכת כבר לא תהיה מדורגת ולכן צריך להמשיך לדרג אותה! למשל:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+a & 0 \end{array}\right)$$

מה קורה במטריצה זו עבור $a = 0$?

רק מוגברת   **תרגיל 1.10** (מממ"ח). נתונה המערכת:

$$\begin{cases} x - y + 2z & = a \\ 2x - 2y + 5z & = b \\ x + 2y - z & = c \\ 2y + 2z & = d \end{cases}$$

נכון או לא נכון:

1. קיימים סקלרים (a, b, c, d) עבורם אין פתרון למערכת.
2. קיימים סקלרים עבורם יש אינסוף פתרונות למערכת.

פתרון: נעביר למטריצה ונדרג:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & a \\ 2 & -2 & 5 & b \\ 1 & 2 & -1 & c \\ 0 & 2 & 2 & d \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_3-R_1]{R_2\to R_2-2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & a \\ 0 & 0 & 1 & b-2a \\ 0 & 3 & -3 & c-a \\ 0 & 2 & 2 & d \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_2\to \frac{1}{3}R_2]{R_2\leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & a \\ 0 & 1 & -1 & {}^{c-a}\!/_{3} \\ 0 & 0 & 1 & b-2a \\ 0 & 2 & 2 & d \end{array}\right) \xrightarrow{R_4\to R_4-2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & a \\ 0 & 1 & -1 & {}^{c-a}\!/_{3} \\ 0 & 0 & 1 & b-2a \\ 0 & 0 & 4 & d-\frac{2}{3}(c-a) \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_4\to R_4-4R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -1 & 2 & a \\ 0 & \boxed{1} & -1 & {}^{c-a}\!/_{3} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & b-2a \\ 0 & 0 & 0 & d-\frac{2}{3}(c-a)-4(b-2a) \end{array}\right)$$

יש 3 איברים פותחים ו-3 נעלמים לכן אף פעם לא נקבל אינסוף פתרונות. לכן 2 הוא לא נכון.
אם $d-\frac{2}{3}(c-a)-4(b-2a)\neq 0$ **(למשל,** $a=b=c=0; d=1$**) אז מתקבל מצב של אין פתרון למערכת ולכן 1 נכון.**
בממ"ח: נסמן א.

תרגיל 1.11. M מערכת משוואות לינארית עם 4 משוואות ו-3 נעלמים בעלת פתרון יחיד. מהי המטריצה הקנונית ששקולת שורות למטריצת המקדמים המצומצמת שלה? רק מוגברת

פתרון: למערכת פתרון יחיד ולכן אחרי דירוג כל האיברים קשורים. המטריצה הקנונית הבאה מקיימת את כל התנאים הללו $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ ולכן M שקולת שורות לה.

תזכורת: כל מטריצה שקולת שורות למטריצה קנונית יחידה.

הגדרה. <u>מערכת הומוגנית</u>

כאשר כל המקדמים החופשיים הם אפסים המשוואה נקראת מערכת הומוגנית. אחרת - מערכת אי הומוגנית.

למערכת הומוגנית תמיד יש פתרון - הפתרון הטריוויאלי: $\underline{0}$.

משפט (1.13.1). *במערכת משוואות הומוגנית – אם יש יותר נעלמים ממשוואות, יש פתרון לא טריוויאלי.*

תרגיל 1.12. M מערכת משוואות, O המערכת ההומוגנית המתאימה. נכון או לא נכון: רק מוגברת

הגדרה. המערכת ההומוגנית ה"מתאימה" למערכת אי הומוגנית היא מערכת הומוגנית בעלת מטריצת מקדמים מצומצמת זהה.

1. אם ל-M פתרון יחיד גם ל-O פתרון יחיד?
2. אם ל-O אינסוף פתרונות גם ל-M יש אינסוף פתרונות.
3. אם ב-M יש שורת אפסים, יש לה אינסוף פתרונות.

פתרון:

1. נכון. כל המשתנים קשורים.
2. לא נכון. תיתכן שורת סתירה ב-M. למשל $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{array}\right)$. כאשר $\alpha = 0$ יש אינסוף פתרונות, אחרת אין פתרון.
3. לא נכון. למשל המערכת מהשאלה הקודמת: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

1.5 תכונות של פתרונות של מערכת משוואות

בשאלה 1.5.7 מראים שבמערכת הומוגנית מתקיימות שתי תכונות: רק מוגברת. ברגילה לציין את ההתכונות הללו ושחשוב לעבור על הפרק

- סכום של פתרונות גם הוא פתרון של המערכת.
- כפל פתרון בסקלר גם הוא פתרון של המערכת.

בשאלה 1.5.8 מראים שלא כך הדבר עבור מערכת לא הומוגנית.

תרגיל 1.13. אם $\underline{c}, \underline{d}$ פתרונות של מערכת אי הומוגנית אז $\underline{c} - \underline{d}$ הוא פתרון של המערכת ההומוגנית המתאימה.

פתרון: נציב את $\underline{c} - \underline{d}$ במשוואה ה-i של המערכת:

$$\begin{aligned} a_{i1}x_1 + ... + a_{in}x_n &= a_{i1}(c_1 - d_1) + ... + a_{in}(c_n - d_n) = \\ &= (a_{i1}c_1 + ... + a_{in}c_n) - (a_{i1}d_1 + ... + a_{in}d_n) = b_i - b_i = 0 \end{aligned}$$

ולכן זהו פתרון של המערכת ההומוגנית.

תרגיל 1.14. L היא מערכת של k משוואות ב-3 נעלמים. הוכיחו:

1. אם $(2,4,6)$ $(-1,-2,-3),$ פותרים את L אז היא הומוגנית.
2. אם $u_1 = (1,-4,0), u_2 = (1,-2,-1), u_3 = (1,-2,1)$ פותרים את L ו-L אי הומוגנית אז $v = (1,0,0)$ לא פותר את המערכת ההומוגנית המתאימה.
3. אם יש פתרון יחיד אז $k \geq 3$

פתרון:

1. נציב במשוואה ה-i: $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 = b_i$

$$\begin{cases} 2a_{i1} + 4a_{i2} + 6a_{i3} & = b_i \\ -a_{i1} - 2a_{i2} - 3a_{i3} & = b_i \end{cases}$$

נחסר את המשוואות זו מזו $R_1 \to R_1 + 2R_2$ ונקבל $0 = 3b_i$ לכן $b_i = 0$ ולכן המערכת הומוגנית.

2. נניח בשלילה ש-v פותר את המערכת ההומוגנית. נתבונן באחת המשוואות של המערכת הלא הומוגנית: $ax + by + cz = d$ ונציב את שלושת הפתרונות שנקבל:

$$\begin{cases} a - 4b & = d \\ a - 2b - c & = d \\ a - 2b + c & = d \\ a & = 0 \end{cases}$$

כאשר המשוואה האחרונה מתקבלת כאשר מציבים את v בשורה המתאימה של המערכת ההומוגנית. קיבלנו מערכת של 4 משוואות ב-4 נעלמים. מקבלים פתרון יחיד $d = 0$ ולכן בעצם המערכת היא הומוגנית! סתירה לאי ההומוגניות שלה, ולכן v אינו פתרון.

3. אם יש פתרון יחיד אז לאחר הדירוג נקבל כי כל המשתנים קשורים, לכן ישנם 3 איברים פותחים ולכן צריכות להיות לפחות 3 שורות.

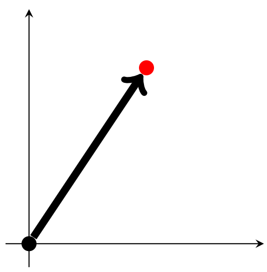
לעבור על הממ"ן והממ"ח הקרובים ולדבר על השאלות שאפשר לפתור.

2 המרחב F^n

2.1 פירוש גאומטרי של $\mathbb{R}^2$

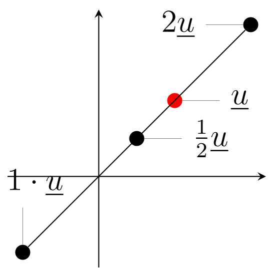
המטרה: אינטואיציה.

כל נקודה ב-$\mathbb{R}^2$ $(x, y) \in$ ניתנת לתיאור כנקודה במרחב ואפשר לזהות אותה כוקטור (קטע מכוון) המצביע מהראשית לנקודה



2.1.1 כפל בסקלר

כאשר כופלים וקטור בסקלר, מקבלים וקטורים נוספים בהתאם לסקלר (גדול מ-1, קטן מ-1 אך חיובי או שלילי):

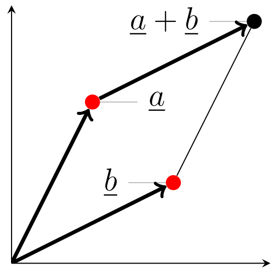


לכן הקבוצה $\{\lambda\underline{a} | \lambda \in \mathbb{R}\}$ היא הישר שעובר דרך $\underline{0}$ ו-$\underline{a}$ והתיאור הזה נקרא הצגה פרמטרית של הישר. באופן כללי, ההצגה הפרמטרית של ישר העובר דרך הנקודות $\underline{a}, \underline{b}$ הוא $\{\lambda(\underline{a} - \underline{b}) + \underline{b} | \lambda \in \mathbb{R}\}$

אם $\underline{b}$ על הישר אז קיים $\lambda \in \mathbb{R}$ כך ש- $\underline{b} = \lambda\underline{a}$ (נתמקד רק בישרים העוברים דרך $\underline{0}$).

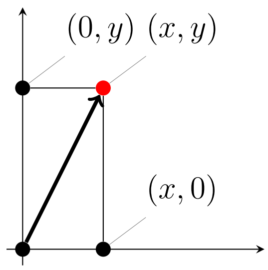
2.1.2 חיבור וקטורים

לפי עמ' 147-148, $\underline{a}+\underline{b}$ הוא אלכסון המקבילית הנקבעת על ידי $\underline{a},\underline{b}$:



2.1.3 רישום וקטור כצירוף לינארי של וקטורים אחרים

כל וקטור אפשר לרשום כצירוף לינארי של $(1,0)$ ו-$(0,1)$:



מקבלים $(x,y)=x(1,0)+y(0,1)$.

מסתבר, שאפשר לעשות זאת תמיד. אם $\underline{a},\underline{b}$ שני וקטורים שאינם על ישר אחד, אז קיימים סקלרים $\lambda,\delta\in\mathbb{R}$ כך ש $(x,y)=\lambda\underline{a}+\delta\underline{b}$, וזהו המישור כולו!

2.1.4 הכללה ל-$\mathbb{R}^n$

- איברים הם וקטורים.
- ישר ב-$\mathbb{R}^n$ הוא קבוצה מהצורה $\{\lambda\underline{a}|\lambda\in\mathbb{R}\}$ כאשר $\underline{a}\neq\underline{0}$.
- מישור הוא קבוצה מהצורה $\{\lambda\underline{a}+\delta\underline{b}|\lambda,\delta\in\mathbb{R}\}$ כאשר $\underline{a},\underline{b}$ לא על ישר אחד ואינם 0.
- ההצגה הגאומטרית נועד לתת אינטואיציה. מה שחשוב באמת היא ההצגה האלגברית ובה נתמקד בקורס.

2.2 צירוף לינארי (צ"ל)

הגדרה. עבור m וקטורים $\underline{u}_1,\underline{u}_2,...,\underline{u}_m\in F^n$ ו-m סקלרים $\lambda_1,\lambda_2,...\lambda_m\in F$ הוקטור

$$\underline{v} = \lambda_1\underline{u}_1 + \lambda_2\underline{u}_2 + ... + \lambda_m\underline{u}_m$$

נקרא הצירוף הלינארי של הוקטורים $\underline{u}_1, \underline{u}_2, ..., \underline{u}_m$ עם המקדמים $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_m \in F$ ומהסגירות של F^n נקבל $\underline{v} \in F^n$.

הערה.

1. חלק או כל הסקלרים יכולים להיות אפסים.
2. הישר שעובר דרך $\underline{a}$ - קבוצת כל הצירופים הלינאריים של הוקטור $\underline{a}$.

תרגיל 2.1. האם $\underline{b} = (7, 3, 6, 14)$ הוא צ"ל של $\underline{v}_1 = (1, 2, 0, 1), \underline{v}_2 = (1, 0, -1, 0), \underline{v}_3 = (2, 1, 3, 7)$?

פתרון: השאלה בעצם שואלת האם קיימים סקלרים $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ כך ש- $\underline{b} = \lambda_1\underline{v}_1 + \lambda_2\underline{v}_2 + \lambda_3\underline{v}_3$
לפי משפט 2.5.3, זה מתקיים אם"ם למערכת הבאה יש פתרון (כדאי להראות את אופן בניית המטריצה):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \underline{v}_1 & \underline{v}_2 & \underline{v}_3 & \underline{b} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 7 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & 7 & 14 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & 14 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 7 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_4 \to R_4 - R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & 14 \\ 0 & 0 & -13 & -25 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -5 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & 14 \\ 0 & 0 & -13 & -25 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & -7 \end{array}\right)$$

לפי השורות R_2, R_3 אין פתרון למערכת ולכן $\underline{b}$ אינו צ"ל של הוקטורים הנ"ל.

רק אם בסוף היינו מקבלים מצב של פתרון יחיד או אינסוף פתרונות, הוקטור הנ"ל היה מתקבל כצ"ל של האחרים.

הערה. בתרגילים מופיעים לרוב דירוגים עד הסוף. עם התקדמות החומר, כדאי לוותר על הדירוגים בכיתה לטובת חסכון בזמן אבל חשוב לציין שהסטודנטים צריכים להציג את כל הדירוג גם בממ"נים וגם במבחן!

תרגיל 2.2. עבור אילו ערכי m הוקטור $\underline{v}=(0,8,10,4)$ הוא צ"ל של הוקטורים $\underline{u}_1=(1,m,-1,3),\underline{u}_2=(-1,1,2m,-1),\underline{u}_3=(1,-3,-m-4,1)$?

פתרון: נכתוב את מערכת המשוואות לפי משפט 2.5.3 ונדרג:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ m & 1 & -3 & 8 \\ -1 & 2m & -m-4 & 10 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_3\to R_3+R_1 \\ R_4\to R_4-3R_1}]{R_2\to R_2-mR_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & m+1 & -3-m & 8 \\ 0 & 2m-1 & -m-3 & 10 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_2\to 0.5R_2]{R_2\leftrightarrow R_4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2m-1 & -m-3 & 10 \\ 0 & m+1 & -m-3 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow[R_4\to R_4-(m+1)R_2]{R_3\to R_2-(2m-1)R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & m-4 & 12-4m \\ 0 & 0 & -2 & -2m+6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_4\to R_4-\frac{m-4}{-2}R_4]{R_3\leftrightarrow R_4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & m-3 \\ 0 & 0 & 0 & m(m-3) \end{array}\right)$$

בשביל שיהיה פתרון בהכרח צריך להתקיים $m=0$ או $m=3$.

2.3 תלות לינארית

הגדרה (2.6.1). קבוצת וקטורים $\{\underline{u}_1,...,\underline{u}_n\}$ תלויה לינארית אם קיימים סקלרים (לא כולם אפס!) כך שמתקיים

$$\lambda_1\underline{u}_1+...+\lambda_n\underline{u}_n=\underline{0}$$

הקבוצה בלתי תלויה לינארית (בת"ל) אם מהמשוואה הזו נובע בהכרח כי $\lambda_1=...=\lambda_n=0$.

דוגמה. הוקטורים $(1,1),(0,1),(1,0)$ תלויים לינארית כי $1\cdot(1,1)-1\cdot(0,1)-1\cdot(1,0)=(0,0)$

משפט (3.6.2)**.** *קבוצה ת"ל אם"ם לפחות אחד מהוקטורים הוא צ"ל של האחרים.*

1. זה לא אומר שכל וקטור הוא צ"ל של האחרים!
2. אם $\underline{0}$ הוא בקבוצה אז היא תלויה לינארית.
3. פירוש גאומטרי:

- ב-$\mathbb{R}^2$ - וקטורים תלויים לינארית אם הם על ישר אחד היוצא מהראשית.
- ב-$\mathbb{R}^3$- וקטורים תלויים לינארית אם הם על מישור אחד העובר דרך הראשית.

4. 2 (*ורק 2!*) וקטורים ת"ל אם"ם הם פרופורציוניים.

דוגמה. בתרגיל 2.2 - הוקטורים בלתי תלויים לינארית לכל m. אם נוסיף לקבוצה את הוקטור הרביעי, היא תהיה תלויה לינארית רק עבור $m = 0, 3$.

תרגיל 2.3. האם הוקטורים $(1, 2, -5, 1), (-1, 4, -11, 1), (2, 1, 3, 3), (0, 1, -1, 1)$ תלויים לינארית?

פתרון: נבדוק בכמה דרכים אפשר לרשום את $\underline{0}$ כצירוף לינארי שלהם (מספיק לדרג רק את המטריצה המצומצמת):

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ -5 & -11 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_3 \to R_3 + 5R_1 \\ R_4 \to R_4 - R_1}]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & 1 \\ 0 & -16 & 13 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 21 & 7 \\ 0 & 0 & -6 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

קיבלנו אינסוף פתרונות ולכן הוקטורים תלויים לינארית.

תרגיל 2.4. נניח שהקבוצה $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ בת"ל. האם גם $\{\underline{v}_1 + \underline{v}_2, \underline{v}_2 - \underline{v}_3, \underline{v}_1 + \underline{v}_2 + \underline{v}_3\}$ בת"ל?

פתרון: נבדוק לפי ההגדרה. נרשום צ"ל מתאפס של הקבוצה השנייה ונבדוק מהם הפתרונות:

$$\lambda_1(\underline{v}_1+\underline{v}_2)+\lambda_2(\underline{v}_2-\underline{v}_3)+\lambda_3(\underline{v}_1+\underline{v}_2+\underline{v}_3)=\underline{0}$$

ומפתיחת סוגריים נקבל:

$$(\lambda_1+\lambda_3)\underline{v}_1+(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\underline{v}_2+(-\lambda_2+\lambda_3)\underline{v}_3=\underline{0}$$

קיבלנו צ"ל מתאפס של קבוצה בת"ל ולכן כל אחד מהמקדמים צריך להיות אפס:

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_3=0\\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0\\ -\lambda_2+\lambda_3=0\end{cases}\xrightarrow{Solving...}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

קיבלנו פתרון יחיד והוא הפתרון הטריוויאלי ולכן הקבוצה גם בת"ל.

תרגיל 2.5. מצא את ערכי a עבורם הוקטורים $\underline{u}_1=(1,a,1),\underline{u}_2=(2a,2,0),\underline{u}_3=(0,1,a)$ בת"ל.

פתרון: נציב כעמודות במטריצה ונדרג:

$$\begin{pmatrix}1&2a&0\\a&2&1\\1&0&a\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3\to R_3-R_1]{R_2\to R_2-aR_1}\begin{pmatrix}1&2a&0\\0&2-2a^2&1\\0&-2a&a\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3\leftrightarrow R_2;]{(*)R_3\to-\frac{1}{a}R_3}$$

הסבר לגביי המעבר (*): היינו רוצים לבצע פעולה שלא מציבה תנאים על הפרמטר, אבל במקרה הזה זה מורכב. לכן עדיף לחלק ב-a כאשר קל לראות שבמצב $a=0$ השורה השלישית מתאפסת ויש אינסוף פתרונות, לכן הם ת"ל. המשך התרגיל נכון עבור $a\neq 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2a & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2-2a^2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3-(1-a^2)R_2} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2-a^2 \end{pmatrix}$$

לכן עבור $a = 0, \pm\sqrt{2}$ הוקטורים ת"ל, ואחרת בת"ל.

משפט. *תוצאות חשובות ממשפטים 2.6.4-2.6.7*

1. *קבוצה שמכילה קבוצה ת"ל בעצמה ת"ל.*
2. *קבוצה שמוכלת בקבוצה בת"ל היא בת"ל.*
3. *קבוצה של $k > n$ וקטורים ב-F^n ת"ל.*
4. *לכן קבוצה בת"ל ב-F^n בהכרח מכילה $k \le n$ וקטורים.*

תרגיל 2.6. הוכח או הפרך: $A = \{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3\} \subset F^n$, $n > 3$, כך ש - $\{\underline{a}_1, \underline{a}_2\}, \{\underline{a}_2, \underline{a}_3\}, \{\underline{a}_1, \underline{a}_3\}$ בת"ל. האם גם A בת"ל?
וההפך?

פתרון: הטענה אינה נכונה. למשל: $\underline{a}_1 = \underline{e}_1, \underline{a}_2 = \underline{e}_2, \underline{a}_3 = \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \in \mathbb{R}^4$.
ההפך נכון - תתי קבוצות של קבוצה בת"ל הן בת"ל.

תרגיל 2.7. האם הוקטורים $(3,2,0,4), (2,1,1,1), (0,1,0,1)$ בת"ל ב-$\mathbb{Z}_5^4$?

פתרון: הוקטורים בת"ל אם"ם הצ"ל היחיד המתאפס הוא הצירוף הטריוויאלי. נרשום את המטריצה המייצגת את הצ"ל ונדרג:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 \to R_4+2R_1]{R_2 \to R_2+R_1} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \to R_2-R_4]{R_2 \to R_2-3R_3} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ואחרי החלפת שורות נקבל מטריצה מדורגת עם איבר פותח בכל שורה, כלומר הפתרון היחיד של המערכת ההומוגנית הוא הטרייויאלי והוקטורים בת"ל.

2.4 פרישה ובסיס

2.4.1 קבוצה פורשת

נחמד לדעת: פורסים לחם, פורשים מפה ולכן המושג עם ש'.

הגדרה (2.7.1). הקבוצה $A = \{\underline{a}_1, ..., \underline{a}_k\}$ פורשת את F^n אם כל וקטור ב-F^n ניתן לרשום כצירוף לינארי של וקטורי A. ניסוח אחר: לכל $\underline{b} \in F^n$ יש פתרון למשוואה

$$x_1\underline{a}_1 + ... + x_k\underline{a}_k = \underline{b}$$

דוגמה. הקבוצה $E = \{\underline{e}_1, ..., \underline{e}_n\}$ פורשת את $\mathbb{R}^n$ כאשר $\underline{e}_i = (0, 0, .., 0, 1, 0..., 0)$ (ה-1 במקום ה-i).

תרגיל 2.8. האם $\{(-1, 2, 5), (2, 4, -1), (1, 14, -5), (1, 6, 4)\}$ פורשת את $\mathbb{R}^3$? האם הקבוצה תלויה לינארית?

פתרון: יהי $\underline{v} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. נבדוק האם וקטור זה הינו צ"ל של הקבוצה:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & a \\ 6 & 14 & 4 & 2 & b \\ 4 & -5 & -1 & 5 & c \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 4R_1]{R_2 \to R_2 - 6R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & 8 & -8 & 8 & b-6a \\ 0 & -9 & -9 & 9 & c-4a \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 + \frac{9}{8}R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & 8 & -8 & 8 & b-6a \\ 0 & 0 & -18 & 18 & c - \frac{43}{4}a + \frac{9}{8}b \end{array}\right)$$

לכל וקטור $\underline{v}$ יש פתרון ולכן הוקטורים אכן פורשים את $\mathbb{R}^3$.

הקבוצה בבירור תלויה לינארית - 4 וקטורים במרחב $\mathbb{R}^3$. דרך אחרת לראות את זה: לפי המטריצה האחרונה הוקטור $(-1, 2, 5)$ צ"ל של האחרים כי:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 6 & 14 & 4 & 2 \\ 4 & -5 & -1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{as\,above} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 8 & -8 & 8 \\ 0 & 0 & -18 & 18 \end{array}\right)$$

משפט (4.7.2). *אם קבוצת וקטורים בת k וקטורים פורשת את F^n אז $k \geq n$.*

2.4.2 בסיס

הגדרה (2.7.6). קבוצה בת"ל שפורשת את F^n נקראת בסיס של F^n.
סדרת וקטורים הפורשת את F^n נקראת בסיס סדור של F^n.
ההבדל בין בסיס לבסיס סדור: בסיס הוא קבוצה, ולכן הסדר של האיברים לא משנה. בבסיס סדור הסדר משנה.

דוגמה. הבסיס הסטנדרטי: $E = \{\underline{e}_1, ..., \underline{e}_n\}$.
הבסיסים הסדורים הבאים של F^2: $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ ו- $(\underline{e}_2, \underline{e}_1)$ הם בסיסים סדורים שונים!

טענה. ב-F^n:

1. בקבוצה בת"ל יש לכל היותר n וקטורים.
2. בקבוצה פורשת יש לפחות n וקטורים.
3. לכן - בבסיס יש בדיוק n וקטורים.

משפט (2.7.8). :

1. קבוצה בת n וקטורים + בת"ל = פורשת.
2. קבוצה בת n וקטורים + פורשת = בת"ל.

לכן כאשר בקבוצה יש n וקטורים מספיק לבדוק את אחת הדרישות כדי לוודא שהקבוצה בסיס.

תרגיל 2.9. נתונים $\underline{v}_1 = (1,2,3,4), \underline{v}_2 = (4,3,2,1)$. בדוק שהם בת"ל והשלם לבסיס של $\mathbb{R}^4$.
חזור על אותו תרגיל ב-$\mathbb{Z}_5^4$

פתרון:

1. הוקטורים לא פרופורציוניים ולכן בת"ל.
   בכדי להשלים אותם לבסיס צריך להוסיף עוד 2 וקטורים (כי יש 4 בבסיס של $\mathbb{R}^4$) שישמרו על חוסר התלות של הקבוצה.
   דרך ראשונה: לבחור וקטורים מהבסיס הסטנדרטי ולבדוק האם הם שומרים על הקבוצה בת"ל.
   דרך שנייה: נדרג מטריצה מצומצמת ונראה איזה וקטורים חסרים:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_3 \to R_3 - 3R_1 \\ R_4 \to R_4 - 4R_1}]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -5 \\ 0 & -10 \\ 0 & -15 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 \to R_4 - 3R_2]{R_3 \to R_3 - 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

חסרים שני איברים פותחים במטריצה ולכן אם נוסיף את $\underline{e}_3, \underline{e}_4$ ונעשה את אותו התהליך נקבל **4** איברים פותחים ולכן קבוצה בת"ל ולכן בסיס.

2. נבדוק האם הוקטורים פרופורציוניים ב-$\mathbb{Z}_5$. האם קיים $\alpha \in \mathbb{Z}_5$ כך ש-$(4,3,2,1) = \alpha(1,2,3,4)$. אם כן, בהכרח $\alpha = 4$. נבדוק אותו: $4(1,2,3,4) = (4,8,12,16) =_5 (4,3,2,1)$ כלומר הוקטורים אכן פרופורציוניים ולכן תלויים לינארית!

לסיכום: לא ניתן אם כך להשלים את הוקטורים הנתונים לבסיס של $\mathbb{Z}_5^4$ כי הם ת"ל.

משפט (9.7.2). *אופן ההצגה של וקטור כצ"ל של בסיס הוא יחיד (המקדמים יחידים) ולהפך - אם לכל וקטור קיימת הצגה באופן יחיד כצ"ל של איברי קבוצה כלשהי - היא בסיס.*

אינטואיציה: הצירים. אם בוחרים וקטור אחד בכל ציר, אז כל וקטור ניתן לרישום כצ"ל של הצירים באופן יחיד. (לשרטט).

תרגיל 2.10. רשום את $(1,1,1,3)$ כצ"ל של $\{(1,1,1,1),(2,0,1,0),(-2,2,0,1),(1,-1,0,0)\}$ בשתי דרכים שונות.

פתרון: אינטואיציה: אם יש דרכים שונות אז הקבוצה אינה בסיס ולכן תלויה לינארית. לכן כשנחפש צ"ל נקבל אינסוף פתרונות. לכן הקבוצה הזו אינה בסיס!

בשביל למצוא את מקדמי הצירוף הלינארי נציב את הוקטורים במטריצה כעמודות (נבחר אותם בסדר כזה המאפשר דירוג נוח יותר):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 + R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \leftrightarrow R_4]{R_3 \to R_3 - \frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

יש **3** איברים פותחים ולכן אינסוף פתרונות. הפתרון הכללי הינו $\lambda_4 = t \in \mathbb{R}$, $\lambda_3 = 3 - t$, $\lambda_2 = 1 - t$, $\lambda_1 = 5 - t$. נבחר שני ערכים שונים עבור t ונקבל את הצירוף הלינארי בדרכים שונות:

$$t=0: \quad 5\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}2\\0\\1\\0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}-2\\2\\0\\1\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\3\end{pmatrix}$$

$$t=1: \quad 4\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}2\\0\\1\\0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-2\\2\\0\\1\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\3\end{pmatrix}$$

תרגיל 2.11. יהיו $\underline{v}_1,...,\underline{v}_m,\underline{w}\in F^n$

1. הוכח שאם $m\geq n$ ואם למשוואה

$$\lambda_1\underline{v}_1+...+\lambda_m\underline{v}_m=\underline{w} \tag{2.1}$$

יש פתרון יחיד אז $\underline{v}_1,...,\underline{v}_m$ בסיס.

2. הוכח שאם $m\leq n$ ולכל $\underline{w}\in F^n$ יש פתרון למשוואה 2.1 אז זהו בסיס.
3. הוכח שאם למשוואה 2.1 יש פתרון ואם הקבוצה בת"ל אז הפתרון יחיד.

פתרון: (מומלץ לפתור כל סעיף לפני שאילת הסעיף הבא)

1. למשוואה ההומוגנית המתאימה ל-2.1 יש פתרון יחיד (אחרת למשוואה הלא הומוגנית יש אינסוף פתרונות) ולכן זהו הפתרון הטריוויאלי. לכן הקבוצה בת"ל. לכן $m\leq n$. בשילוב עם הנתון נקבל $m=n$ ולכן זהו בסיס.
הכי טוב להסביר ולפתור את השאלה היא על ידי סכימה של שני הפתרונות (של ההומוגנית ושל האי הומוגנית) והוכחה שהפתרון של ההומוגנית הוא בהכרח טריוויאלי.
2. לפי הנתון הקבוצה פורשת ולכן $m\geq n$ ובשילוב עם הנתון נקבל שוב $m=n$ ולכן זהו בסיס.
3. נניח $\underline{c}\neq\underline{d}$ פתרונות שונים למשוואה 2.1. לכן $\underline{c}-\underline{d}$ פתרון לא טריוויאלי של אותה המשוואה כאשר $\underline{w}=\underline{0}$. סתירה לחוסר התלות ולכן הפתרון יחיד.

תרגיל 2.12. יהיו $\underline{v}_1,...,\underline{v}_m,\underline{w}\in\mathbb{R}^n$, נניח ש- $A=\{\underline{v}_1,...,\underline{v}_m\}$ בת"ל, $B=\{\underline{v}_1+\underline{w},...,\underline{v}_m+\underline{w}\}$ ת"ל. הוכח ש-$\underline{w}$ צ"ל של A.

פתרון: הרעיון: ננסה להביע את $\underline{w}$ כצ"ל של A.

B ת"ל ולכן קיימים $\lambda_1, ..., \lambda_m$, לא כולם אפסים, כך ש $\lambda_1(\underline{v}_1 + \underline{w}) + ... + \lambda_m(\underline{v}_m + \underline{w}) = 0$.

לכן $\lambda_1\underline{v}_1 + ... + \lambda_m\underline{v}_m = -(\lambda_1 + ... + \lambda_m)\underline{w}$.

אם $\lambda_1 + ... + \lambda_m = 0$ אז זהו צ"ל מתאפס של איברי A ולכן כל המקדמים הם אפסים - סתירה.

לכן $\lambda = -\lambda_1 - ... - \lambda_m \neq 0$, אפשר לחלק בו ולקבל את הצ"ל הדרוש: $\underline{w} = \frac{\lambda_1}{\lambda}\underline{v}_1 + ... + \frac{\lambda_m}{\lambda}\underline{v}_m$.

תרגיל 2.13. $A = \{\underline{a}_1, ..., \underline{a}_k\} \subset F^n$. הוכח או הפרך:

1. אם A פורשת ותלויה לינארית אז $k > n$.
2. אם $k > n$ אז A פורשת את F^n.

פתרון: (מומלץ לפתור כל סעיף בנפרד)

1. A פורשת ולכן $k \geq n$. אם $k = n$ זהו בסיס ולכן בת"ל - סתירה. לכן $k > n$.
2. הטענה אינה נכונה. למשל $A = \{\underline{0}, \underline{e}_1, 2\underline{e}_1\} \subset \mathbb{R}^2$ מקיימת את הנתונים ובכל זאת אינה פורשת.

תרגיל 2.14. $\underline{b}, \underline{a}_1, ...\underline{a}_k \in \mathbb{R}^n$ כך שהוקטורים $\underline{a}$ שונים זה מזה וכן $\underline{b} \neq \underline{0}$. נניח שקיימים אינסוף פתרונות למשוואה $x_1\underline{a}_1 + ... + x_k\underline{a}_k = \underline{b}$. הוכח או הפרך:

1. אם $k \geq n + 1$ אז $\underline{a}_1, ..., \underline{a}_k$ פורשת את $\mathbb{R}^n$.
2. $\underline{a}_1, ..., \underline{a}_k$ תלויה לינארית.
3. קיים $\underline{c} \in \mathbb{R}^n$ כך שלמשוואה $x_1\underline{a}_1 + ... + x_k\underline{a}_k = \underline{c}$ יש פתרון יחיד.

פתרון: (מומלץ לפתור כל סעיף בנפרד)

1. לא נכון. למשל $\underline{a}_1 = \underline{b} = (1, 0), \underline{a}_2 = (2, 0), \underline{a}_3 = (0, 0)$.
2. נכון. הפרש של שני פתרונות שונים הוא פתרון לא טריוויאלי למערכת ההומוגנית ולכן הוקטורים תלויים.
3. לא נכון. מסעיף 2 הוקטורים תלויים ויש פתרון לא טריוויאלי למערכת ההומוגנית ואפשר להוסיף אותו לפתרון היחיד ולקבל פתרון חדש.

לעבור על הממ"ן והממ"ח הקרובים ולדבר על השאלות שאפשר לפתור.

3 מטריצות

עד עכשיו התייחסנו למטריצה בתור כלי עזר לכתיבה של מערכות של משוואות. ביחידה הזו נתייחס אל מטריצות כאל אובייקטים מתמטיים בפני עצמם. זהו האובייקט המתמטי המרכזי בקורס.

הגדרה (3.1.1). מטריצה $n \times m$ מעל שדה F היא אוסף של mn סקלרים מ-F המסודרים ב-m שורות ו-n עמודות.

את האיבר בשורה ה-i והעמודה ה-j נסמן ב-a_{ij}. לפעמים רושמים גם $A_{m\times n}$ כדי להדגיש את הסדר של המטריצה.

את השורה ה-i של המטריצה נסמן ב-$[A]_i^r$ ואת העמודה ה-i נסמן ב-$[A]_i^c$.

שוויון מטריצות. $A_{m\times n} = B_{p\times q}$ אם"ם $m = p, n = q$ וגם כל האיברים שווים: $a_{ij} = b_{ij}$.

כלומר מטריצות הן שוות אם הן באותו גודל ושוות רכיב-רכיב.

ניתן להתייחס אל וקטור כאל מקרה פרטי של מטריצה:

- וקטור שורה הוא מטריצה $1 \times n$.
- וקטור עמודה הוא מטריצה $n \times 1$.

לכן $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq (1,0)$ בתור מטריצות (גודל שונה) אבל אם מתייחסים אליהם כאל איברים ב-$\mathbb{R}^2$ אז הם שווים.

הגדרה (3.2.5). מטריצה מסדר $n \times n$ נקראת מטריצה ריבועית. למטריצה ריבועית יש אלכסון ראשי (a_{ii}) ואלכסון משני $(a_{i,n-i})$ (לשרטט):

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & * & a_{14} \\ * & a_{22} & a_{23} & * \\ * & a_{32} & a_{33} & * \\ a_{41} & * & * & a_{44} \end{pmatrix}$$

הגדרה (3.3.1). מסמנים את קבוצת כל המטריצות מסדר $n \times m$ עם איברים מתוך שדה F ב- $M_{m\times n}(F)$. אם $m = n$ אפשר לרשום $M_n(F)$ בקיצור.

3.1 פעולות על מטריצות

3.1.1 חיבור וכפל בסקלר

החיבור והכפל בסקלר מוגדרים כמו בחיבור n-יות.

הגדרה (3.3.2). $(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$

כדי שחיבור מטריצות יהיה מוגדר נדרש שהמטריצות יהיו מאותו הסדר והחיבור הוא רכיב-רכיב.

הגדרה (3.3.4). $\lambda(A)_{ij} = (\lambda A)_{ij}$

שוב, ההגדרה זהה לכפל וקטור בסקלר - כופלים כל איבר במטריצה בסקלר.

במשפטים 3.3.3 ו-3.3.5 מתוארות התכונות של חיבור מטריצות וכפל בסקלר. תכונות אלו זהות לתכונות שראינו עבור חיבור וכפל בסקלר של n-יות, שמהוות מקרה פרטי למעשה של מטריצות.

3.1.2 כפל מטריצות

ההגדרה האינטואיטיבית היא להגדיר כפל בין מטריצות כמו חיבור - כפל רכיב ברכיב המתאים. הבעיה שהתוצאה של הכפל לא מעניינת ולא שימושית.

הגדרה (3.4.1). מכפלה סקלרית

כפל של וקטור שורה $a_{1\times n} = (a_1, ..., a_n)$ בעמודה $b_{n\times 1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}$ מוגדר להיות

$$a_{1\times n} b_{n\times 1} = a_1 b_1 + .. + a_n b_n \in F$$

תוצאת הכפל היא סקלר ולכן המכפלה נקראת מכפלה סקלרית.

דוגמה. $(2,1,0)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2+2+0 = 4$.

כפל בין מטריצות מוגדר על בסיס מכפלה סקלרית:

הגדרה. כפל בין מטריצות $A_{m\times n} B_{n\times q} = C_{m\times q}$ מוגדר על ידי $c_{ij} = [A]_i^r [B]_j^c$, כלומר האיבר ה-i,j של התשובה הוא מכפלה סקלרית של השורה ה-i של A בעמודה ה-j של B.

חשוב להדגיש שהכפל לא תמיד מוגדר וצריך שהממדים הפנימיים יתאימו. הממדים החיצוניים מגדירים את הגודל של מטריצת התוצאה.

דוגמה. (לחשב כל איבר בנפרד במכפלה)

1. $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ - הכפל לא מוגדר, הממדים לא מתאימים.

2. $\begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

הדוגמא האחרונה מלמדת אותנו שלא תמיד $AB = BA$ כלומר כפל מטריצות אינו חילופי (קומוטטיבי) וזאת משתי סיבות:

1. לא תמיד הכפל מוגדר בשתי הוריאציות (ממדים).
2. גם אם הוא מוגדר - לא כופלים את אותם איברים זה בזה ולכן התוצאה תהיה שונה.

מטריצות שמקיימות $AB = BA$ נקראות מטריצות מתחלפות.

תרגיל 3.1. מצא את כל המטריצות המתחלפות עם $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$　　　　רק במוגברת

פתרון:

שאלה: האם בהכרח יש מטריצות כאלו? (כן - למשל $A, I_2, 0$ עצמה)

בבירור כל מטריצה כזו תהיה 2×2. נסמן $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ונחשב את הכפל:

$$AB = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 2a-c & 2b-d \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} a+2b & 2a-b \\ c+2d & 2c-d \end{pmatrix}$$

נדרוש שוויון מתוך המטריצות ונקבל מערכת משוואת הומוגנית:

$$\begin{cases} a+2c = a+2b \\ b+2d = 2a-b \\ 2a-c = c+2d \\ 2b-d = 2c-d \end{cases}$$

ולה אינסוף פתרונות.

לאחר הפתרון מקבלים כי קבוצת כל המטריצות המתחלפות עם A היא $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a-b \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

במשפטים שבפרק 3.5 בספר מסוכמות התכונות שכפל מטריצות מקיים כמו פילוג הכפל מעל החיבור, קיבוציות הכפל וקיבוציות עם כפל בסקלר. בגלל שמטריצות בד"כ לא מתחלפות, חלק מהנוסחאות והתכונות שהכרנו בכפל רגיל לא מתקיימות כאן.

הערה. בכל התרגילים ההנחה היא שהכפל מוגדר והסדר מתאים.

תרגיל 3.2. הוכח או הפרך:

1. קיימות מטריצות $A, B \neq 0$ כך ש $AB = 0$.
2. קיימת $A \neq 0$ כך ש - $AA = 0$.

פתרון: (לפתור כל סעיף לפני שעוברים לסעיף הבא)

1. הטענה נכונה. למשל $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. הטענה נכונה, למשל A מהסעיף הקודם.

התרגיל האחרון נותן לנו תוצאה חשובה מאוד שכדאי לזכור (יש נטייה לסטודנטים לטעות ולהניח שאם $AB = 0$ אז $A = 0$ או $B = 0$ וזה נכון רק בשדות בעוד ש- $M_{m\times n}$ אינה שדה).

דוגמה. הוכח כי $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$ אמ"ם המטריצות מתחלפות. (התרגיל מופיע בספר, כאן הוא רק כתזכורת)

הערה. מגדירים פורמלית חזקה רק בהמשך, אבל ההנחה היא שהכוונה ברורה.

פתרון: נפתח את אגף ימין:

$$(A+B)(A-B) = AA + BA - AB - BB = A^2 - B^2 + (BA - AB)$$

ולכן השוויון מתקיים אמ"ם $BA - AB = 0$ כלומר אמ"ם המטריצות מתחלפות. בספר יש עוד כמה דוגמאות באותו סגנון והמסקנה היא אחת: אי אפשר להשתמש בנוסחאות שאנחנו מכירים ממספרים ממשיים (כמו נוסחאות כפל מקוצר) עבור מטריצות באופן אוטומטי, כי חלק מהנוסחאות מתבססות על חילופיות הכפל.

הגדרה (3.5.2). מטריצת היחידה מסדר n מוגדרת על ידי:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

ומקיימת לכל מטריצה $A_{m\times n}I_n = A_{m\times n}$, $I_nA_{n\times m} = A_{n\times m}$.
עבור מטריצה ריבועית $A_{n\times n}I_n = I_nA_{n\times n} = A_{n\times n}$ לכן I_n היא נייטרלי עבור הכפל ב-$M_n(F)$.

תרגיל 3.3. A, B מטריצות ריבועיות כך ש $(1)\ AB = A; (2)\ BA = B$. **הוכח:** $A^2 = A, B^2 = B$. רק במוגברת

פתרון: נוכיח עבור A וההוכחה עבור B זהה:

$$A^2 = AA \overset{(1)}{=} (AB)A \overset{\textbf{assoc.}}{=} A(BA) \overset{\textbf{(2)}}{=} AB \overset{\textbf{(1)}}{=} A$$

3.1.3 כתיבה וקטורית של מערכת משוואות

נסתכל על מערכת המשוואות הכללית:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ ... \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

ונגדיר $A = \begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ & \ddots & \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{pmatrix}$, $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}$. את מערכת המשוואות ניתן לרשום מחדש בתור $A\underline{x} = \underline{b}$. כל מערכת משוואות יכולה להיכתב כמכפלה של מטריצת המקדמים המצומצמת במטריצת הנעלמים.

למה זה טוב?

1. אם נדע "לחלק" במטריצות נוכל לפתור משוואות כאלו בקלות (כמו שפותרים את $4x = 8$)
2. ניתן ללמוד על תכונות של המטריצה באמצעות מערכת המשוואות שהיא מייצגת ולהפך.
3. בעמודים 271-273 יש מספר שאלות שממחישות את העוצמה של הכתיבה הזו. למשל:
נניח $A\underline{x}_h = \underline{0}$, $A\underline{x}_p = \underline{b}$. לכן $A(\underline{x}_p + \underline{x}_h) = A\underline{x}_p + A\underline{x}_h = \underline{b}$ כלומר סכום של פתרון של ההומוגנית והלא הומוגנית נותן פתרון של הלא הומוגנית. הוכחה ישירה של עובדה זו בלי שימוש בכפל מטריצות הוא ארוך ומסורבל יותר.

תרגיל 3.4. A מטריצה $m \times n$, B מטריצה $n \times m$ כך ש $AB = I_m$. רק במוגברת

1. הוכח כי למערכת $B\underline{x} = \underline{0}$ יש פתרון יחיד.
2. הוכח כי $m \leq n$.
3. נניח גם שקיימת מטריצה C כך ש $BC = I_n$. הוכח כי $C = A$ ו-$m = n$.

פתרון:

שאלה: איזו מערכת זו? כמה נעלמים יש בה? כמה משוואות?

1. יהי $\underline{x}$ פתרון של $B\underline{x} = \underline{0}$. נכפול את שני האגפים ב-$A$ ונקבל $AB\underline{x} = A\underline{0} = \underline{0}$ ולכן $\underline{x} = \underline{0}$.
זה מוכיח שאם יש פתרון הוא בהכרח פתרון האפס ומאחר ופתרון האפס הוא תמיד פתרון של מערכת ההומוגנית, יש פתרון יחיד.
2. זו מערכת משוואות הומוגנית עם פתרון יחיד. לכן מספר הנעלמים חייב להיות קטן ממספר המשוואות ולכן $m \leq n$.
3. ראשית, על מנת שהתנאים יתקיימו C צריכה להיות מטריצה $m \times n$. לפי סעיף א' (בחילופי תפקידים) נקבל שיש פתרון יחיד למערכת $C\underline{x} = \underline{0}$ ולכן $n \leq m$ ולכן $n = m$.
כמו כן, $BC = I_n$ ולכן $ABC = A$ ולכן $C = A$.

תרגיל 3.5. תהי $A \in M_{m\times n}$, $0 \neq B \in M_{n\times m}$ כך ש $AB = 0$. הוכח כי למערכת $A\underline{x} = \underline{0}$ יש אינסוף פתרונות.

פתרון: תהי $[B]_j^c \neq 0$ עמודה של B השונה מאפס (קיימת כזו כי זו לא מטריצת האפס). לפי ההגדרה, העמודה ה-j של המכפלה AB היא $A[B]_j^c = \underline{0}$ (תוצאה חשובה - למה 3.4.3). לכן מצאנו פתרון לא טריוויאלי למערכת ולכן יש אינסוף פתרונות.

תרגיל 3.6. נסמן $P(A) = \{\underline{x} | A\underline{x} = \underline{0}\}$ - קבוצת הפתרונות של A. הוכח כי $P(A) \subseteq P(BA)$. האם בהכרח מתקיים שוויון? רק במוגברת

פתרון: יהי $\underline{c} \in P(A)$. לכן $A\underline{c} = \underline{0}$ ולכן $BA\underline{c} = B\underline{0} = \underline{0}$. לכן $\underline{c} \in P(BA)$ ולכן $P(A) \subseteq P(BA)$.

בד"כ לא מתקיים שוויון, למשל עבור $B = 0$ נקבל $P(BA) = \mathbb{R}^n$ תמיד.

3.1.4 חזקות

פעולת החזקה מוגדרת רק עבור מטריצות ריבועיות (אחרת הכפל לא מוגדר).

הגדרה. עבור $A \in M_n$ מגדירים:
$A^0 = I_n$, $A^1 = A$ ולכל $k > 1$: $A^k = A^{k-1}A$. בדומה לחזקה הרגילה של מספרים.

הגדרה. מטריצה אלכסונית היא מטריצה בה איברים שאינם על האלכסון שווים לאפס. מקרה פרטי הוא מטריצה סקלרית: λI - שבה כל איברי האלכסון שווים.
מטריצות אלכסוניות הכי קל להעלות בחזקה כי מכפלה של אלכסוניות זו מכפלה של האיברים המתאימים באלכסון (שאלה 3.6.4).

משפט* (3.6.3). *המטריצות היחידות שמתחלפות עם כל מטריצה הן המטריצות הסקלריות.

תרגיל 3.7. תהי $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$. חשב את A^n לכל n.

פתרון: נגדיר $B = aI_3$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. בבירור $A = B + C$ וכן B, C מתחלפות כי B מטריצה סקלרית. לכן ניתן להשתמש בבינום ניוטון ונקבל:

$$A^n = (B+C)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k C^{(n-k)}$$

חישוב ישיר מלמד כי $C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ואילו $C^3 = 0$ ולכן החזקות היחידות שנשארות בסכימה הן אלו עבורן C מופיע בחזקת 0,1,2:

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} B^n C^0 + \begin{pmatrix} n \\ n-1 \end{pmatrix} B^{n-1} C^1 + \begin{pmatrix} n \\ n-2 \end{pmatrix} B^{n-2} C^2 \\ &= a^n I + n a^{n-1} C + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} C^2 \\ &= \begin{pmatrix} a^n & n a^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} \\ 0 & a^n & n a^{n-1} \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

תרגיל 3.8. $A \in M_3(\mathbb{R})$ כך ש $A^3 = 0$ אבל $A^2 \neq 0$. הוכח כי קיים $\underline{v} \in \mathbb{R}^3$ כך ש $A\underline{v} \neq 0$ וכי קיים $\underline{v} \in \mathbb{R}^3$ כך שהקבוצה $\{\underline{v}, A\underline{v}, A^2\underline{v}\}$ היא בסיס של $\mathbb{R}^3$.

רק במוגברת

פתרון: $A^2 \neq 0$ ונניח כי האיבר במקום ה-i, j שונה מאפס. לכן האיבר ה-i במכפלה $A^2\underline{e}_j \neq 0$. לכן אם נבחר $\underline{v} = \underline{e}_j$ נקבל $A^2\underline{v} \neq 0$ ולכן בהכרח גם $A\underline{v} \neq 0$. נתבונן בצירוף לינארי מתאפס של הוקטורים:
$\lambda_1\underline{v} + \lambda_2 A\underline{v} + \lambda_3 A^2\underline{v} = \underline{0}$ ונכפל אותו ב-A^2. נקבל $\lambda_1 A^2\underline{v} = 0$ ולכן $\lambda_1 = 0$.
נציב במשוואה, נכפול אותה ב- A ונקבל באופן דומה $\lambda_2 A^2\underline{v} = 0$ ולכן $\lambda_2 = 0$ ולכן גם $\lambda_3 = 0$.
לפיכך זו קבוצה בת"ל בת 3 איברים ולכן בסיס של $\mathbb{R}^3$.

3.1.5 שחלוף

הגדרה (3.2.3). אם $A = (a_{ij})_{m\times n}$ אז $A^t = (a_{ji})_{n\times m}$. כלומר השורה הראשונה של המטריצה המשוחלפת היא העמודה הראשונה של המטריצה המקורית.

דוגמה. $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

משפט. *תכונות עיקריות:*

1. $\left(A^t\right)^t = A$
2. $(A+B)^t = A^t + B^t$
3. $(\lambda A)^t = \lambda A^t$
4. $(AB)^t = B^t A^t$

הגדרה (3.2.6). מטריצה ריבועית היא סימטרית אם $A = A^t$ (לא בהגדרה אבל כדאי להראות - אנטי סימטרית אם $A^t = -A$). חשוב להדגיש שלא מדובר על הפכים - מטריצה ממשית יכולה להיות סימטרית ווגם אנטיסימטרית (איזו?) ויכולה להיות לא סימטרית ולא אנטיסימטרית.

תרגיל 3.9. תהי A מטריצה אנטיסימטרית מעל F. הוכח:

1. אם $F = \mathbb{R}$ איברי האלכסון של המטריצה הם אפסים.
2. האם הטענה נכונה גם עבור $F = \mathbb{Z}_2$?

פתרון:

1. מתקיים $A + A^t = 0$ ולכן $a_{ii} + a^t_{ii} = 0$ אבל $a^t_{ii} = a_{ii}$ ולכן $2a_{ii} = 0$ ולכן $a_{ii} = 0$. כנדרש.
2. לא. למשל מטריצת היחידה: $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ מעל שדה זה היא אנטיסימטרית כי $1 = -1$. זו אגב דוגמא למטריצה שהיא בו זמנית גם סימטרית וגם אנטיסימטרית. באופן כללי - ההוכחה בסעיף א' נכונה בכל שדה בו $1 + 1 \neq 0$.

תרגיל 3.10. הוכח או הפרך:

1. $AB^t + BA^t$ סימטרית
2. אם A סימטרית ו-B אנטיסימטרית אז $A^5B^3 - B^3A^5$ אנטיסימטרית

רק במוגברת

פתרון: בשני המקרים אפשר לבדוק האם הטענה נכונה על ידי שחלוף המטריצה:

1. $(AB^t + BA^t)^t = (AB^t)^t + (BA^t)^t = (B^t)^tA^t + (A^t)^tB^t = BA^t + AB^t = AB^t + BA^t$ ולכן המטריצה סימטרית.
2. $(A^5B^3 - B^3A^5)^t = (B^3)^t(A^5)^t - (A^5)^t(B^3)^t = -B^3A^5 + A^5B^3$ ולכן המטריצה סימטרית והיא לא בהכרח תהיה אנטיסימטרית. אפשר לבדוק זאת עם דוגמא פשוטה, למשל $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ מתקבל $A^5B^3 - B^3A^5 = \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ -5 & -10 \end{pmatrix}$.

תרגיל 3.11. הוכח שכל מטריצה ריבועית מעל $F \neq Z_2$ ניתנת לרישום באופן יחיד כסכום של מטריצה סימטרית ואנטיסימטרית.

פתרון: תהי $A \in M_n(F)$ כאשר $F \neq Z_2$. ננסה לרשום את A כסכום של מטריצה סימטרית B ואנטיסימטרית C, כלומר אנחנו מחפשים שתי מטריצות כך שיתקיים

$$A = B + C$$

נפעיל שחלוף של שני האגפים ונקבל:

$$A^t = (B + C)^t = B^t + C^t = B - C$$

קיבלנו מערכת של שתי משוואת בשני נעלמים ופתרונן:

$$B = \frac{A + A^t}{2}$$
$$C = \frac{A - A^t}{2}$$

האם זה מספיק?

כמעט. הנחנו שקיימות כאלו מטריצות ומצאנו מהן צריכות להיות. כלומר, אם יש כאלו, הן צריכות להיות המטריצות שמצאנו. לא הוכחנו עדיין שיש כאלו. קל לראות שאכן B סימטרית, C אנטיסימטרית וסכומן נותן את A, כך שאכן קיימות כאלו מטריצות.

3.2 מטריצות הפיכות

הפרק הזה עוסק רק במטריצות ריבועיות!

ראינו שI_n נייטרלי ביחס לכפל: $A = IA = AI$. במספרים ממשיים $a = a \cdot 1$ ולכל $a \neq 0$ יש $b = a^{-1}$ כך ש $ab = 1$. האם זה נכון גם למטריצות? האם לכל $A \neq 0$ יש B כך ש $AB = BA = I$?

דוגמה. לא בהכרח. למשל עבור $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ולכל $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ מתקיים

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

בפרק הזה נבדוק מתי יש מטריצה כזו, איך מוצאים אותה ומה המשמעות של זה.

הגדרה (3.8.2). A היא מטריצה הפיכה אם קיימת B כך ש $AB = BA = I$. במקרה זה A נקראית גם רגולרית, המטריצה B היא יחידה שמקיימת תכונה זו ולכן נקראת ההפכית של A ומסומנת A^{-1}.
אחרת - A תקרא לא הפיכה או סינגולרית.

תרגיל 3.12. כל מטריצה שמכילה שורה או עמודת אפסים אינה הפיכה. רק במוגברת

פתרון: בדומה לדוגמא - אם השורה ה-i היא שורת אפסים אז גם בכל מכפלה AB השורה ה-i תהיה שורת אפסים ולא $\underline{e}_i$ כנדרש. כנ"ל לגבי עמודה.

משפט (4.8.3 והשאלות שאחריו). תכונות של מטריצות הפיכות

אם A, B הפיכות אז:

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$
3. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (זה נכון לכל מספר של מטריצות)
4. $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$
5. אם $\lambda \neq 0$ אז $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$
6. עבור מטריצה אלכסונית $A = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}$ שכל איברי האלכסון אינם אפסים נקבל $A^{-1} = \begin{pmatrix} a_1^{-1} & & & \\ & a_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n^{-1} \end{pmatrix}$

משפט *(3.8.3). כלל הצמצום:*

1. אם A הפיכה ומתקיים $AB = AC$ אז $B = C$.
2. אם A הפיכה ומתקיים $BA = CA$ אז $B = C$.

הערה. אם מתקיים $AB = CA$ לא בהכרח נובע $B = C$, גם כאשר A הפיכה!

תרגיל 3.13. A ריבועית ומתקיים $A^n = 0$. הוכח כי A סינגולרית ו-$I - A$ רגולרית.

פתרון:

הערה. אפשר לקבל את זה מיידית מהנחת שלילה (A הפיכה גורר A^n הפיכה וסתירה) אבל המטרה היא להראות את ההעלאה בחזקה.

נניח כי קיימת B כך ש $AB = I$. נעלה בחזקת n: $(AB)^n = I^n = I$.

אבל $(AB)^n = ABABABAB...AB = A^nB^n = 0$ כשהחילופיות מגיעה בגלל שהמטריצות הופכיות זו לזו! קיבלנו סתירה ולכן A סינגולרית.

בנוסף, ניעזר בזהות $(I - A^n) = (I - A)(I + A + A^2 + ... + A^{n-1})$ ולכן מיידית מקבלים כי $I - A$ הפיכה.

תרגיל 3.14. נתון כי $A, B, A + B$ הפיכות. הוכח:

1. $A^{-1} + B^{-1}$ הפיכה.
2. $(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = A(A + B)^{-1}B$

פתרון: לכאורה מדובר על שני סעיפים, אבל למעשה מדובר על שאלה עם רמז. בגלל שנתון מה צפויה להיות ההפכית, אפשר לכפול ביניהן:

$$(A^{-1}+B^{-1})A(A+B)^{-1}B=(I+B^{-1}A)(A+B)^{-1}B=B^{-1}(B+A)(A+B)^{-1}B=B^{-1}B=I$$

דרך נוספת לפתרון:

צ"ל $(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=A(A+B)^{-1}B$ **כלומר (הופכי על שני האגפים)**

$$A^{-1}+B^{-1}=(A(A+B)^{-1}B)^{-1}=B^{-1}(A+B)A^{-1}$$

נפשט את אגף ימין:

$$B^{-1}(A+B)A^{-1}=(B^{-1}A+I)A^{-1}=B^{-1}+A^{-1}$$

וזה בדיוק אגף שמאל ולכן קיבלנו פסוק אמת.

שאלה: האם הפתרון נכון?

תשובה: לא! התבססנו על זה שמה שצריך להוכיח נכון כדי להתקדם, כלומר הנחנו את מה שצריך להוכיח. דרך הוכחה כזו אינה נכונה ואינה לגיטימית מתמטית. כל מה שהוכחנו זה שאם הטענה נכונה, לא הצלחנו למצוא סתירה. הדוגמא הבאה תמחיש זאת בצורה בולטת:

דוגמה. הוכח: 3=4

פתרון: 3=4 ולכן גם 4=3. נחבר את שתי המשוואות ונקבל 7=7 כלומר פסוק אמת.

תרגיל 3.15. נתון כי מתקיים $A^3-2A+I=0$. הוכח כי A הפיכה והביעו את A^{-1} באמצעות A,I.   רק במוגברת

פתרון: $2A-A^3=I$ ולכן $(2I-A^2)A=I$ לכן המטריצה הפיכה ומתקיים $A^{-1}=2I-A^2$

תרגיל 3.16. הוכח או הפרך:

1. אם A,B סינגולריות אז $A+B$ סינגולרית.
2. אם A,B הפיכות אז $A+B$ הפיכה.
3. אם $A^2-A=0$ וגם $A\neq I$ אז A סינגולרית.

פתרון: התרגיל ממחיש שבניגוד לכפל, חיבור מטריצות לא שומר על תכונות של הפיכות.

1. לא. למשל $I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. לא, למשל $I + (-I) = 0$.
3. נניח בשלילה כי A הפיכה. נצמצם ונקבל $A = I$ וזו סתירה. לכן A סינגולרית!

דרך הוכחה שגויה: מהנתון $A(A-I) = 0$ ולכן $A = I$ או $A = 0$. מאחר ו-$A \neq I$ בהכרח מתקיים $A = 0$ וזו אכן מטריצה סינגולרית. הטיעון הזה הוא טעות נפוצה ואינו נכון! מכפלה של מטריצות יכולה להיות אפס מבלי ששתי המטריצות יהיו מטריצת האפס.

תרגיל 3.17. נתונים $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ וקטורים בת"ל ב-$\mathbb{R}^n$. הוכח כי גם $A\underline{v}_1, A\underline{v}_2, A\underline{v}_3$ בת"ל כאשר A הפיכה. רק במוגברת

פתרון: נרשום צ"ל מתאפס של הוקטורים: $\lambda_1 A\underline{v}_1 + \lambda_2 A\underline{v}_2 + \lambda_3 A\underline{v}_3 = 0$. נכפול ב- A^{-1} ונקבל $\lambda_1\underline{v}_1 + \lambda_2\underline{v}_2 + \lambda_3\underline{v}_3 = 0$. הוקטורים בת"ל ולכן בהכרח $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

נשים לב שההפך תמיד נכון. אם Av_1, Av_2, Av_3 בת"ל אז גם v_1, v_2, v_3 בת"ל.

3.2.1 המטריצה ההפכית

3.2.1.1 מטריצות אלמנטריות

הגדרה (3.9.1). מטריצה אלמנטרית (מסדר $n \times n$) היא מטריצה שהתקבלה מביצוע פעולה אלמנטרית (אחת!) על I_n.

דוגמה. המטריצה $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ התקבלה מ-I_2 על ידי ביצוע $R_1 \leftrightarrow R_2$.

תהי $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(F)$. נכפול במטריצה שקיבלנו משמאל ונקבל: $\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

כלומר, במקום לבצע פעולה אלמנטרית "החלפת שורות" אפשר לכפול משמאל את המטריצה במטריצת היחידה אחרי שביצענו עליה פעולה זו.

בספר מוכיחים שהדבר נכון באופן כללי - כל פעולה אלמנטרית שאפשר לעשות על מטריצה אפשר במקום זה להכפיל אותה משמאל במטריצה האלמנטרית המתאימה. לכן תהליך דירוג הוא בסה"כ כפל של הרבה מטריצות אלמנטריות משמאל לפי הסדר:

$$B = E_k ... E_2 E_1 A$$

כאשר כל אחד מה-E_i היא מטריצה אלמנטרית. כל מטריצה כזו היא הפיכה ("למה?") ואם נסמן $E = E_k ... E_1$ נקבל $B = EA$, כלומר דירוג של A זה כמו לכפול אותה משמאל במטריצה הפיכה אחת. המסקנה המרכזית:

משפט (9.9.3). *מטריצות A, B שקולות שורות אם"ם קיימת C הפיכה כך ש-$B = CA$.*

3.2.1.2 מציאת המטריצה ההפכית

השיטה הכללית: $(A|I) \to (I|A^{-1})$. כלומר מדרגים את A דירוג קנוני עד מטריצת היחידה ועושים את אותן הפעולות על I. בסוף התהליך נקבל את A^{-1}.

דוגמה. מציאת ההפכית של $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

$$(A|I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 3R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 + R_2}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to -1/2 R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right)$$

ולכן $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

תרגיל 3.18. מצא את ההפכית של $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

פתרון: נחשב באותו אופן:

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 7R_1]{R_2 \to R_2 - 4R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & -7 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

קיבלנו שורת אפסים ולכן לא ניתן להגיע בהמשך הדירוג למטריצת היחידה. לכן המטריצה אינה הפיכה!

מסקנה. השיטה הכללית למציאת הופכית מאפשרת גם למצוא את ההופכית וגם לבדוק האם מטריצה היא הפיכה או לא.

יחד עם זאת, למטריצה שקיבלנו מימין לקו יש משמעות. מתקיים:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

כלומר בעזרת השיטה הזו אפשר למצוא את המטריצה ההפיכה ממשפט **3.9.9**.

השיטה עובדת מאחר ותהליך דירוג כמוהו ככפל של המטריצה A בהרבה מטריצות אלמנטריות וכאשר מגיעים למטריצת היחידה - זו בדיוק המטריצה ההפכית.

תרגיל 3.19. תהי A הפיכה. הוכח כי למערכות $B\underline{x} = \underline{0}$ ו-$AB\underline{x} = \underline{0}$ יש אותה קבוצת פתרונות.

פתרון: אפשר לפתור באמצעות הכלה דו-צדדית אבל הרבה יותר פשוט: מאחר ו-A הפיכה נקבל שהמטריצות B ו- AB שקולות שורות ולכן יש להן אותה קבוצת פתרונות.

***משפט** (6.10.3). אחד המשפטים החשובים בקורס המסכם את התנאים השקולים לכך ש-A הפיכה:*

1. A שקולת שורות ל-I.
2. למערכת $A\underline{x} = \underline{0}$ יש פתרון יחיד.
3. לכל $\underline{c}$ למערכת $A\underline{x} = \underline{c}$ יש פתרון (יחיד).
4. העמודות של A בלתי תלויות לינארית ב-F^n.
5. העמודות פורשות את F.
6. העמודות מהוות בסיס ל-F^n.
7. כנ"ל לגביי השורות.

תרגיל 3.20. $A \in M_3(\mathbb{R})$ מקיימת $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1. האם A הפיכה?
2. מצא את A.

פתרון:

1. נשים לב כי למשוואה $A\underline{x}=\underline{0}$ אין פתרון יחיד (טריוויאלי וגם $(1,1,0)^t$) ולכן היא סינגולרית.
2. נרשום את כל הנתונים כמשוואה בין מטריצות:

$$A\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0&2\\1&0&0\\2&0&3\end{pmatrix}$$

לאחר תהליך דירוג פשוט מקבלים $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&0&-1\\1&-1&0\end{pmatrix}$

ולכן $A=\begin{pmatrix}4&0&2\\1&0&0\\2&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&0&-1\\1&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&2&4\\-1&1&1\\1&-1&2\end{pmatrix}$.

תרגיל 3.21. יהיו $A,B\in M_n$ כך ש $A=I-AB$. הוכח:

1. A הפיכה ומתחלפת עם B.
2. אם B סימטרית גם A סימטרית.
3. $B^3=0$ אם"ם $A=I-B+B^2$

פתרון:

1. נעביר אגפים ונקבל $A(I+B)=I$ לכן A הפיכה ומתקיים $A^{-1}=I+B$.
מטריצות הופכיות מתחלפות ולכן $A(I+B)=(I+B)A$ ומפתיחת סוגריים נקבל $AB=BA$.
2. נשחלף את המשוואה $A(I+B)=I$ ונקבל $(I+B)^tA^t=I^t=I$. כמו כן $(I+B)^tA^t=(I+B)A^t=I$. לכן $(I+B)^{-1}=A^t$ ומיחידות המטריצה ההפכית נקבל $A=A^t$.
3. נשים לב שמתקיימת הזהות $(I-B+B^2)(I+B)=I+B^3$. לכן אם $B^3=0$ אז מיחידות ההפכי $A=(I-B+B^2)$ ולהפך, אם $A=I-B+B^2$ אז $A(I+B)=I$ ולכן $B^3=0$.

תרגיל 3.22. תהי $A\in M_n(\mathbb{R})$ הפיכה כך שסכום כל שורה הוא c. הוכח כי $c\neq 0$, וחשב את הסכום של כל שורה במטריצה A^{-1}.

פתרון: נתבונן בוקטור $\underline{v} = (1,1,...,1)^t$. מהגדרת כפל מטריצות, $A\underline{v} = c\underline{v}$, כי כפל בוקטור זה סוכם את איברי כל שורה.

אם $c = 0$ אז $\underline{v}$ הוא פתרון לא טריויאלי למשוואה ההומוגנית, וזו סתירה להפיכות המטריצה. לכן $c \neq 0$.

נכפול את שני האגפים בהפכית ונקבל $A^{-1}A\underline{v} = cA^{-1}\underline{v}$. באגף ימין אנחנו מקבלים c כפול סכום כל שורה של A^{-1} ובאגף שמאל את $\underline{v}$.

השוואה רכיב-רכיב בין הוקטורים מלמדת אותנו שסכום כל שורה במטריצה A^{-1} קבוע ושווה ל-$\frac{1}{c}$.

תרגיל 3.23. הוכח או הפרך: אם למשוואה $A\underline{x} = \underline{b}$ יש פתרון ואם A שקולת שורות ל-C אז גם למשוואה $C\underline{x} = \underline{b}$ יש פתרון (אפשר לערוך הצבעה בין הסטודנטים)

פתרון: הפרכה:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

הטענה הופיעה במבחן במתמטיקה לתלמידי מדעי החברה והצליחה לבלבל את הרוב. הטענה משחקת על העובדה שלשתי מטריצות שקולות שורות יש את אותם פתרונות, אבל כאן דירגנו רק את המטריצה בלי לדרג את וקטור המקדמים החופשיים.

לעבור על הממ"ן והממ"ח הקרובים ולדבר על השאלות שאפשר לפתור.

4 דטרמיננטות

הערה. הפרק עוסק רק במטריצות ריבועיות.

דטרמיננטה היא מספר המחושב לכל מטריצה ונותן אינפורמציה לגביה. בפרק הזה נראה איך לחשב אותו ומה הוא מלמד על המטריצה. בפרק 4.9 בספר יש חומר רשות שמסביר מהי דטרמיננטה ביתר פירוט.

דטרמיננטה מוגדרת באינדוקציה על הגודל של המטריצה:

הגדרה. עבור מטריצה $A \in M_n$ הדטרמיננטה מוגדרת באופן הבא:

- אם $n = 1$: $\det(A) = |A| = a_{11}$ (הגדרה 4.1.1; לא להתבלבל עם ערך מוחלט)
- אם $n = 2$: $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ (הגדרה 4.1.2)
- עבור $n > 2$: $\det(A) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{1+i}M_{1i}a_{1i}$

כאשר A_{pq} מוגדרת להיות המטריצה המינורית של A, המתקבלת על ידי מחיקת השורה ה-p והעמודה ה-q (מטריצה מסדר $n-1 \times n-1$) ו- $M_{pq} = \det A_{pq}$ הוא המינור ה-pq. (הגדרה 4.1.4)

הנוסחא המופיעה בהגדרה נקראת "פיתוח לפי השורה הראשונה".

דוגמה. חישוב לפי ההגדרה:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = (5\cdot9-6\cdot8)-2(4\cdot9-6\cdot7)+3(4\cdot8-5\cdot7) = 0$$

הבחירה בשורה הראשונה היא מקרית. לפי משפט הפיתוח (4.2.1)- ניתן לפתח דטרמיננטה לפי כל שורה או עמודה לפי הנוסחא הבאה (פיתוח לפי שורה j, פיתוח לפי עמודה j)

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}M_{ji}a_{ji} = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{j+i}M_{ij}a_{ij}$$

דרך טובה לזכור את הסימן שמוצמד לכל מינור היא הלוח הבא:

$$\begin{matrix} + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & + \end{matrix}$$

נרצה לפתח לפי שורות או עמודות בהן יש הרבה אפסים כי אז כמות החישובים קטנה יותר.

דוגמה. שימוש במשפט הפיתוח:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \\ 2 & 5 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = +10 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 10 \cdot 6 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 240$$

מסקנה (2.2.4). *אם במטריצה יש שורה או עמודת אפסים, הדטרמיננטה מתאפסת.*

מסקנה (1.3.4). $\det(A) = \det(A^t)$

ראינו שנוח לחשב דטרמיננטה כשיש הרבה אפסים, כאשר בוחרים את השורה או העמודה המתאימות, אבל לא תמיד יש במטריצה אפסים. המשפט הבא מלמד שאפשר לעשות פעולות אלמנטריות כדי להוסיף אפסים ולפשט את הדטרמיננטה:

משפט. *השפעת פעולות אלמנטריות על דטרמיננטה:*

1. החלפת שורות כופלת את הדטרמיננטה ב-1.
2. כפל שורה בסקלר כופלת את הדטרמיננטה באותו הסקלר.
3. הוספת כפולה של שורה לשורה אחרת לא משנה את הדטרמיננטה.
4. אם $A \in M_n$ אז $|\lambda A| = \lambda^n |A|$.

מסקנה. *אם יש שתי שורות שוות או שורה שהיא צירוף לינארי של השורות האחרות, הדטרמיננטה מתאפסת.*

לכן כדאי לפני שמחשבים דטרמיננטה לבצע פעולות אלמנטריות ולאפס שורות או עמודות.

מסקנה. *במטריצה משולשית (עליונה או תחתונה) הדטרמיננטה היא מכפלת איברי האלכסון.*
לכן, לא חייבים לדרג דירוג קנוני אלא מספיק דירוג שמביא אותנו למטריצה משולשית.

תרגיל 4.1. חשב את הדטרמיננטות הבאות:

1. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 9 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 1 & x & 0 & 0 \\ x & 1 & x & 0 \\ 0 & x & 1 & x \\ 0 & 0 & x & 1 \end{vmatrix}$

פתרון:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 9 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{R_4 \to R_4 - 3R_2}{\overset{R_3 \to R_3 - 2R_2}{=}} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 9 & 1 & 2 \\ 0 & -17 & -2 & -3 \\ 0 & -25 & -2 & -6 \end{vmatrix} \overset{1^{st}col}{=} (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -17 & -2 & -3 \\ -25 & -2 & -6 \end{vmatrix}$$

$$\overset{R_1 \to R_1 + R_2}{=} -1 \begin{vmatrix} -16 & 0 & 0 \\ -17 & -2 & -3 \\ -25 & -2 & -6 \end{vmatrix} = 16 \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} = 16(12-6) = 96$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x & 0 & 0 \\ x & 1 & x & 0 \\ 0 & x & 1 & x \\ 0 & 0 & x & 1 \end{vmatrix} \overset{R_2 \to R_2 - xR_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 1-x^2 & x & 0 \\ 0 & x & 1 & x \\ 0 & 0 & x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-x^2 & x & 0 \\ x & 1 & x \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix} \overset{C_2 \to C_2 - xC_3}{=}$$

$$\begin{vmatrix} 1-x^2 & x & 0 \\ x & 1-x^2 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-x^2 & x \\ x & 1-x^2 \end{vmatrix} = (1-x^2)^2 - x^2 = 1 - 3x^2 + x^4$$

תרגיל 4.2. חשב מעל $\mathbb{Z}_2$ את

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

פתרון:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{=}{R_2 \to R_2 + R_4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{=}{R_2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{=}{C_3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 1 = 1$$

תרגיל 4.3. נתון $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a+2b-3c & a'+2b'-3c' & a''+2b''-3c'' \\ 3b & 3b' & 3b'' \\ 2c & 2c' & 2c'' \end{pmatrix}$.
נתון $|A| = \alpha$, חשב את $|B|$.

פתרון: נבין איך בונים את B מתוך A וכך נחשב את הדטרמיננטה. מתקיים:

$$A^t \xrightarrow{R_1 \to R_1 + 2R_2 - 3R_3} \begin{pmatrix} a+2b-3c & a'+2b'-3c' & a''+2b''-3c'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to 2R_3]{R_2 \to 3R_2} B$$

שחלוף והפעולה הראשונה לא שינו את הדטרמיננטה, והפעולה השניה הגדילה אותה פי $6 = 3 \cdot 2$ ולסיכום $|B| = 6\alpha$.

תרגיל 4.4. מהי הדטרמיננטה של המטריצה $A = \begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$?

פתרון: קודם כל, מה זה כבר יכול להיות? הרי אין סיבה שזה יהיה 7 או כל מספר אחר ממשי, כי למשל אם הדטרמיננטה היא 7, היא יכולה להיות גם 14 (כפל השורה הראשונה ב-2) או -7 (החלפת שורות). לכן המועמד הסביר היחיד הוא 0 שלא משתנה מפעולות אלמנטריות. נוכיח זאת:

נגדיר ב-B את המטריצה 3×5 המורכבת מ-3 השורות האחרונות של A. המטריצה B שקולת שורות למטריצה עם 0,1 או 2 איברים פותחים (יכולים להיות רק בשתי העמודות הראשונות) ולכן בהכרח לפחות שורת אפסים אחת ולכן הדטרמיינטה היא אפס. (יש עוד הרבה דרכים לגשת לשאלה).

4.1 מטריצות כלליות $n \times n$

סוג מיוחד של חישובי דטרמיננטות עוסק במטריצות כלליות מגודל $n \times n$ הבנויות בצורה מסוימת. מאחר ואי אפשר לחשב את הדטרמיננטה ישירות, יש צורך להבין את האופן בו המטריצה נבנתה ולנצל את החוקיות כדי להגיע למטריצה משולשית או מטריצה פשוטה יותר שניתן לחשב את הדטרמיננטה שלה.

תרגיל 4.5. חשב את $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & & 1 \\ 1 & 1 & 1 & & 1 \\ 1 & 1 & 2 & & 1 \\ & & & \ddots & \\ 1 & 1 & 1 & & n-1 \end{vmatrix}$ עבור $n \geq 2$.

פתרון: נחפש חוקיות. נשים לב שבכל שורה יש 1 בכל מקום פרט לאלכסון. לכן אם נפחית מכל שורה את השורה השניה נאפס את כל האחדים ונישאר רק עם אלכסון.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & & 1 \\ 1 & 1 & 1 & & 1 \\ 1 & 1 & 2 & & 1 \\ & & & \ddots & \\ 1 & 1 & 1 & & n-1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\forall i \neq 2]{R_i \to R_i - R_2} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & & 0 \\ 1 & 1 & 1 & & 1 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & n-2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{R_1}{=} (-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & & 1 \\ 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & n-2 \end{vmatrix}$$

הגענו למטריצה משולשית והדטרמיננטה היא מכפלת איברי האלכסון. לכן הדטרמיננטה היא $(-1)\cdot 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (n-2) = -(n-2)!$.

תרגיל 4.6. חשב את $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & & n \\ 2 & 3 & & n+1 \\ & & \ddots & \\ n & n+1 & \ldots & 2n-1 \end{vmatrix}$ עבור $n \geq 2$

פתרון: נשים לב שכל איבר גדול מהאיבר שמעליו ב-1. לכן אם נפחית שורה מהשורה שמתחתיה נקבל שורת אחדות:

$$D_n \xrightarrow[i=n,n-1,\ldots 2]{R_i \to R_i - R_{i-1}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = 0$$

שכן קיבלנו שתי שורות זהות ולכן הדטרמיננטה מתאפסת.

"שאלה: האם זה נכון? מה עשינו לא בסדר?"

תשובה: יש הנחה סמויה בפתרון שיש לפחות 3 שורות, אחרת לא היינו יכולים לקבל 2 שורות זהות. לכן עבור $n=2$ יש לחשב בנפרד:

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1$$

לכן חשוב לב לשים לב לא להניח דברים על גודל המטריצה וכן לשים לב לביצוע פעולות על שורות שעדיין קיימות (במקרה הזה: קודם משנים את השורה האחרונה, ואז את זאת שמעליה וכו' ולא להפך).

תרגיל 4.7. חשב את הדטרמיננטה של
$$\begin{vmatrix} a & b & b & & b \\ b & a & b & & b \\ & & & \ddots & \\ b & b & b & & a \end{vmatrix}.$$

פתרון: כרגיל, ראשית נבין את המבנה של המטריצה. כל האיברים הם b פרט לאלכסון שהוא a. כל חיסור של שתי שורות ייצור שורת אפסים פרט לשני איברים וזה לא טוב לנו. מצד שני, סכום האיברים בכל שורה הוא קבוע ולכן נוכל לנצל זאת. כמו כן - אפשר לבצע פעולות אלמנטריות גם על העמודות!

$$\begin{vmatrix} a & b & b & & b \\ b & a & b & & b \\ & & & \ddots & \\ b & b & b & & a \end{vmatrix} \xrightarrow{C_1 \to C_1 + C_2 + \ldots + C_n} \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & & b \\ a+(n-1)b & a & b & & b \\ & & & \ddots & \\ a+(n-1)b & b & b & & a \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_i \to R_i - R_1} \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & & b \\ 0 & a-b & 0 & & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & a-b \end{vmatrix}$$

קיבלנו מטריצה משולשית ולכן הדטרמיננטה היא $(a+(n-1)b) \cdot (a-b)^{n-1}$.

אפשר לבדוק את התוצאה בכמה דרכים:

1. לנסות לחשב מטריצות $2 \times 2, 3 \times 3$ ישירות ולוודא שהתוצאה מסתדרת עם הנוסחא.
2. להציב ערכים. למשל, אם נציב $a = b$ נקבל אפס כצפוי (מטריצה סינגולרית שכל שורותיה זהות) או אם נציב $b = 0$ נקבל a^n כצפוי (מטריצה אלכסונית). זה לא נותן 100% ודאות אבל נוח לבדיקה זריזה.

תרגיל 4.8. הוכח ש $-\beta_1 \cdot \ldots \cdot \beta_{n-1}(\frac{1}{\beta_1} + \ldots + \frac{1}{\beta_{n-1}}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \beta_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & 0 & 0 & \beta_{n-1} \end{vmatrix} = A_n$ כאשר $\beta_1, \ldots, \beta_{n-1} \neq 0$.

פתרון: נבצע פעולות אלמנטריות כדי לאפס את השורה הראשונה ולקבל מטריצה אלכסונית:

$$A_n \xrightarrow[i=1,2,...,n-1]{R_1 \to R_1 - 1/\beta_i R_{i+1}} \begin{vmatrix} -(\frac{1}{\beta_1} + ... + \frac{1}{\beta_{n-1}}) & 0 & ... & 0 \\ 1 & \beta_1 & ... & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \beta_{n-1} \end{vmatrix} = -\beta_1 \cdot ... \cdot \beta_{n-1}(\frac{1}{\beta_1} + ... + \frac{1}{\beta_{n-1}})$$

דרך נוספת: מאחר ונתון לנו הערך של הדטרמיננטה שאליו אמורים להגיע, ניתן להשתמש בעובדה שדטרמיננטה היא פעולת חישוב רקורסיבית ולהיעזר באינדוקציה על ידי זה שנחשב את הדטרמיננטה ונגיע למטריצה קטנה יותר שנראית כמו המטריצה המקורית.

בסיס האינדוקציה: $A_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \beta_1 \end{vmatrix} = -1 = -\beta_1 \cdot \frac{1}{\beta_1}$ כנדרש.

צעד האינדוקציה: נניח שהנוסחא נכונה עבור כל מטריצה A_n מהצורה הזו מסדר $n \times n$ ונחשב את A_{n+1}:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & ... & 1 & 1 \\ 1 & \beta_1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 1 & 0 & ... & 0 & \beta_{n-1} & . \\ 1 & 0 & ... & 0 & 0 & \beta_n \end{vmatrix} \overset{C_2}{=} -1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 1 & \beta_2 & 0 & ... & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 1 & 0 & ... & 0 & \beta_{n-1} & . \\ 1 & 0 & ... & 0 & 0 & \beta_n \end{vmatrix}$$

$$+\beta_1 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & ... & 1 & 1 \\ 1 & \beta_2 & 0 & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 1 & 0 & ... & 0 & \beta_{n-1} & . \\ 1 & 0 & ... & 0 & 0 & \beta_n \end{vmatrix}$$

המטריצה הראשונה היא מטריצה משולשית ולכן הדטרמיננטה היא מכפלת האלכסון. המטריצה הימנית היא מטריצה $n \times n$ מהצורה המתאימה להנחת האינדוקציה ולכן הדטרמיננטה מתקבלת לפי הנוסחא. לפיכך

הדטרמיננטה היא

$$-\beta_2 \cdot ... \cdot \beta_n - \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot ... \cdot \beta_n(\frac{1}{\beta_2} + ... + \frac{1}{\beta_n}) = -\beta_1 \cdot ...\beta_n(\frac{1}{\beta_1} + ... + \frac{1}{\beta_n})$$

כנדרש.

4.2 התאפסות הדטרמיננטה

המשפט העיקרי והסיבה העיקרית לכך שאנחנו עוסקים בדטרמיננטות:

***משפט* (1.4.4).** *$|A| = 0$ אם"ם A סינגולרית.*

משפט זה מתווסף לכל המשפטים על מטריצות רגולריות ונותן איפיון נוסף וחשוב למטריצה הפיכה - מטריצה שהדטרמיננטה שלה שונה מאפס.

המשפט הזה מאוד שימושי במספר בדיקות בהן נתקלנו בפרק 3. למשל: אם רוצים לבדוק שקבוצה של n וקטורים בת"ל, אפשר לרשום אותם כשורות או עמודות במטריצה, לחשב דטרמיננטה ולבדוק אם היא הפיכה. כנ"ל אם רוצים לדעת אם למערכת משוואות הומוגנית יש פתרון יחיד או לא, וכו' וכו'. חשוב לזכור - רק למטריצות ריבועיות.

***משפט* (1.5.4).** *משפט המכפלה*

$$|AB| = |A| \cdot |B|$$

מסקנה. *עבור מטריצה הפיכה,* $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

הוכחה: מציבים במשפט המכפלה $B = A^{-1}$.

תרגיל 4.9. הוכיחו שעבור כל מטריצה לא ריבועית A לפחות אחת מהמטריצות AA^t, A^tA אינה הפיכה.

פתרון: טעות נפוצה: להשתמש במשפטים על מכפלת דטרמיננטה. אי אפשר, כי A לא ריבועית.

נניח בלי הגבלת הכלליות כי $A \in M_{m\times n}$כאשר $m > n$. לכן במטריצה A^t יש m עמודות השייכות למרחב F^n ולכן תלויות לינארית. כלומר קיים $0 \neq v \in F^m$ כך ש-$A^tv = 0$. לכן גם $AA^tv = 0$ כלומר המטריצה AA^t סינגולרית (לפי **3.10.6**).

מסקנה (שאלה *2.5.4*). *מכפלה של מטריצות הפיכות הפיכה. כשאחת המטריצות במכפלה אינה הפיכה - המכפלה כולה אינה הפיכה.*

אין לנו טענה דומה לגבי סכום כי בד"כ $|A+B| \neq |A| + |B|$. הסכימה היחידה שעובדת היא אם המטריצות נבדלות בשורה/עמודה אחת בלבד:

משפט *(4.3.4)*. *אם* $A = \begin{pmatrix} [A]_1^r \\ \vdots \\ [A]_i^r \\ \vdots \\ [A]_n^r \end{pmatrix}$ *מטריצה ריבועית מסדר* $n \times n$ *ואם* $B = \begin{pmatrix} [A]_1^r \\ \vdots \\ [B]_i^r \\ \vdots \\ [A]_n^r \end{pmatrix}$ *נבדלת ממנה רק בשורה ה-*i *אז*

$$\det A + \det B = \det \begin{pmatrix} [A]_1^r \\ \vdots \\ [A]_i^r + [B]_i^r \\ \vdots \\ [A]_n^r \end{pmatrix}$$

תרגיל 4.10. תהי A מטריצה ריבועיות ו-B מטריצה שהתקבלה מ-A באופן הבא:

$$A \xrightarrow{R_i \leftrightarrow R_j} B$$

הוכח או הפרך:

1. אם A הפיכה אז ל-$(A+B)\underline{x} = \underline{0}$ יש פתרון יחיד.
2. אם ל-$AB\underline{x} = \underline{0}$ יש אינסוף פתרונות אז גם ל-$A\underline{x} = \underline{0}$ יש אינסוף פתרונות.

פתרון:

1. הטענה לא נכונה. ב-$A+B$ יש שתי שורות זהות ולכן המטריצה אינה הפיכה ואין פתרון יחיד למערכת ההומוגנית.
דוגמא נגדית: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. הטענה נכונה. למערכת המשוואות יש אינסוף פתרונות ולכן המטריצה אינה הפיכה ו-$|AB|=0$. המטריצה B התקבלה מ-A על ידי החלפת שתי שורות ולכן $|B|=-|A|$. נציב זאת ונקבל $-|A|^2=0$ כלומר גם A סינגולרית ולכן גם למשוואה ההומוגנית המתאימה יש אינסוף פתרונות.

תרגיל 4.11. תהיינה $A,B\in M_n(\mathbb{R})$ כך ש $A^{2016}=0, AB=A+B$. הוכח כי $I-A$ הפיכה וכי B איננה הפיכה.

פתרון: נשים לב לזהות $(I-A^{2016})=(I-A)(I+A+A^2+...+A^{2015})$. אגף שמאל הוא I ולכן שתי המטריצות באגף ימין הפיכות והופכיות זו לזו. בפרט, $I-A$ הפיכה.

כמו כן, מהנתון השני נקבל על ידי העברת אגף: $A=B(A-I)$. A הינה מטריצה סינגולרית (נובע, למשל, ממשפט המכפלה וחישוב הדטרמיננטה) לכן אחת המטריצות באגף ימין צריכה להיות סינגולרית. $A-I$ הפיכה כי $I-A$ הפיכה ולכן B סינגולרית.

תרגיל 4.12. תהי $A\in M_n(\mathbb{Q})$ מטריצה הפיכה ב- $M_n(\mathbb{R})$. הוכח כי A הפיכה גם ב-$M_n(\mathbb{Q})$.

כלומר, כאשר מסתכלים על A כמטריצה של מספרים ממשיים היא הפיכה וצריך להוכיח שהיא הפיכה גם כמטריצה של מספרים רציונליים, כלומר שהמטריצה ההופכית מורכבת רק ממספרים רציונליים.

ניסיון הוכחה אפשרי: *להגיד שבמהלך הדירוג לא צריך מספרים לא רציונליים ולכן ההופכית תהיה גם לא רציונלית. הבעיה היא שאין משפט שקובע שתהליך הדירוג הוא יחיד ולא ברור בלי נפנופי ידיים למה לא יידרש באף שלב כפל במספר שאינו רציונלי. גם לא ברור למה ההופכית של מטריצה שמורכבת רק ממספרים רציונלים לא יכולה להכיל גם מספרים לא רציונליים.*

פתרון: חישוב דטרמיננטה מבוסס על כפל וחיבור בלבד, ואלו פעולות סגורות בשדה הרציונליים לכן $\det A\in\mathbb{Q}$. כמו כן, נתון שהמטריצה הפיכה בממשיים, לכן $\det A\neq 0$ ולכן $A\in M_{n\times n}(\mathbb{Q})$ הפיכה (כמטריצה רציונלית הדטרמיננטה שלה שונה מאפס ולכן הפיכה מעל הרציונליים).

אפשר גם בעזרת כלל קרמר ולהוכיח שכל רכיב של A^{-1} הוא רציונלי.

4.3 נוסחת קרמר

נוסחת קרמר משמשת למציאת פתרונות של מערכת משוואות עבור מטריצה הפיכה. תהי $A\in M_n(\mathbb{R})$ הפיכה ו-$\underline{b}\in\mathbb{R}^n$. נסמן ב- A_k את המטריצה המתקבלת מ-A על ידי החלפת העמודה ה-k בעמודה $\underline{b}$. אזי הרכיב ה-k של פתרון המערכת $A\underline{x}=\underline{b}$ מתקבל על ידי $x_k=\frac{|A_k|}{|A|}$.

השיטה לפעמים לא שימושית כי מצריכה הרבה חישובי דטרמיננטות אבל יכולה לסייע לנו בלימוד תכונות של פתרונות או כשאנחנו צריכים רק רכיב אחד של הפתרון ולא את הפתרון כולו.

דוגמה. חשב את הפתרון של המערכת $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

בהתאם לסימונים שלנו, $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ ולכן $x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{4-10}{4-6} = 3$.

באותו אופן $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ ולכן $y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{5-3}{-2} = -1$. ולכן $x = 3, y = -1$ הינו הפתרון היחיד של מערכת המשוואות.

תרגיל 4.13. תהי $A \in M_n(\mathbb{R})$, $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$. נסמן ב- A_k את המטריצה המתקבלת מ-A על ידי החלפת העמודה ה-k בעמודה $\underline{b}$. נתון: $|A| = 0$.

1. הוכח: אם $|A_1| \neq 0$ אז אין פתרון למערכת $A\underline{x} = \underline{b}$.
2. נניח שלכל k, $|A_k| = 0$. האם בהכרח קיים פתרון ל-$A\underline{x} = \underline{b}$?

פתרון: נשים לב שלא ניתן להשתמש ישירות בנוסחת קרמר שכן המטריצה סינגולרית!

1. נסמן את עמודות A ב$\underline{a}_1, ..., \underline{a}_n$ ונניח בשלילה כי קיים פתרון למערכת $A\underline{x} = \underline{b}$. לכן קיימים סקלרים כך ש $\lambda_1\underline{a}_1 + ... + \lambda_n\underline{a}_n = \underline{b}$.
אם $\lambda_1 = 0$ אז $\underline{b}$ הוא צירוף של העמודות האחרות של A ולכן העמודה הראשונה של המטריצה A_1 תלויה לינארית באחרות, כלומר המטריצה סינגולרית, בסתירה לנתון.
לכן $\lambda_1 \neq 0$. נחלק, נעביר אגפים ונקבל את הצירוף הלינארי $\underline{a}_1 = \frac{1}{\lambda_1}\underline{b} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\underline{a}_2 - ... - \frac{\lambda_n}{\lambda_1}\underline{a}_n$.
צ"ל זה מייצג פתרון למשוואה $A_1\underline{x} = \underline{a}_1$ בו $x_1 = \frac{1}{\lambda_1}$. יחד עם זאת, לפי נוסחת קרמר מתקיים $x_1 = \frac{|A|}{|A_1|} = 0$ בסתירה לכך שהמקדם הוא $\frac{1}{\lambda_1} \neq 0$
קיבלנו סתירה בשני המקרים ולכן למערכת המשוואות אין פתרון.
2. לא. דוגמא נגדית: $A = 0_{2\times 2}$, $\underline{b} = \underline{e}_1$. לכל k יש ב-A_k שורת אפסים ולכן הדטרמיננטה היא אפס אבל אין פתרון למערכת.

לעבור על הממ"ן והממ"ח הקרובים ולדבר על השאלות שאפשר לפתור.

6 שדה המרוכבים

לקראת המפגש – לקרוא טריגונומטריה בפרקי ההכנה. חשוב לדעת את ההגדרה של הפונקציות, זהויות בסיסיות וזוויות בסיסיות.

מוטיבציה שדה הממשיים לא סגור לפתרונות של פולינומים, הבולט שביניהם: $x^2 = -1$. שדה המרוכבים נוצר כדי למלא את הפער. לשדה הממשיים מוסיפים מספר שנקרא i ומקיים $i^2 = -1$.

קבוצת המרוכבים היא: $\mathbb{C} = \{a + ib | a, b \in \mathbb{R}\}$.

לדוגמא: $z = 4 + 5i$.

החלק שנכפל ב-i נקרא החלק המדומה: $Im(z) = 5$.

החלק הממשי: $Re(z) = 4$.

אם $Im(z) = 0$ המספר ממשי. אם $Re(z) = 0$ המספר נקרא מדומה (טהור). ההצגה הזו נקראת הצגה אלגברית.

הערה. אין רע בלי טוב. אמנם הוספנו פתרונות למשוואות שלא היו לנו פתרונות בעבר, אבל כאשר משתמשים במרוכבים אנחנו מוותרים על אי שוויונים. אין אי שוויונים במספרים מרוכבים כי אין סדר ולכן אין משמעות לביטויים כמו $i < 1$.

6.1 פעולות במרוכבים

הגדרה (6.2.2). סכום מרוכבים $z_1 = a_1 + ib_1$ ו- $z_2 = a_2 + ib_2$ הוא

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$$

מכפלת המספרים המרוכבים $z_1 = a_1 + ib_1$ ו- $z_2 = a_2 + ib_2$ היא

$$z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

$\mathbb{C}$ עם הפעולות שהגדרנו מהווה שדה. מאחר ו-$\mathbb{C} \subset \mathbb{R}$ והפעולות מתלכדות על איברי $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ נקרא תת-שדה של $\mathbb{C}$ ולהפך - $\mathbb{C}$ הוא שדה הרחבה של $\mathbb{R}$.

הגדרה (6.4.3+6.4.1). ערך מוחלט של מספר מרוכב מוגדר על ידי:

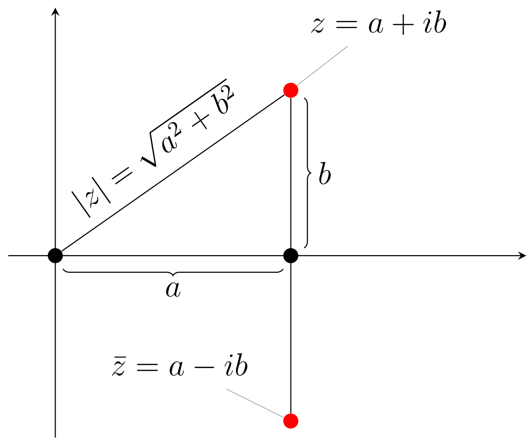
$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

הצמוד של מספר מרוכב מוגדר על ידי:

$$\overline{z} = a - ib$$

וחישוב ישיר מראה שמתקיים

$$|z|^2 = z\overline{z}$$



משפט (2.4.6). *התכונות היסודיות של צמוד:*

- $z = \overline{z}$ אם"ם z ממשי
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

משפט (6.4.5). *התכונות היסודיות של הערך המוחלט:*

- $|z| = 0$ ***אם"ם*** $z = 0$

- $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- ***אי שוויון המשולש*** $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

לפי שאלה 6.4.7 אם z הוא פתרון של משוואה פולינומיאלית עם מקדמים ממשיים $a_n x^n + ... + a_0 = 0$ אז גם $\overline{z}$ פתרון. זה מאפשר לנו למצוא בקלות עוד פתרונות. למשל, i הוא פתרון של $x^2 + 1 = 0$ ולכן גם $\overline{i} = -i$ פתרון של המשוואה והוא השורש הריבועי השני של -1.

המשפט היסודי של האלגברה: לכל פולינום במספרים מרוכבים ממעלה n יש לפחות שורש אחד ולכל היותר n שורשים שונים. (אבל זה לא המשפט היסודי של האלגברה הלינארית, אז הוא לא מאוד חשוב בקורס, למרות שמו....)

6.1.1 חילוק במספרים מרוכבים

כדי לחלק במספר מרוכב אפשר לכפול מונה ומכנה בצמוד שלו. ככה במכנה יופיע מספר ממשי והחלקים המדומים יהיו רק במונה, מה שיאפשר לנו להגיע להצגה האלגברית הרגילה.

תרגיל 6.1. רשום את ההצגה האלגברית של המספרים הבאים:

1. $\frac{1}{2-i}$
2. $\frac{1-i}{3+i}$

פתרון:

$$\frac{1}{2-i} = \frac{1}{2-i} \cdot \frac{2+i}{2+i} = \frac{2+i}{2^2+1^2} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$$

$$\frac{1-i}{3+i} = \frac{1-i}{3+i} \cdot \frac{3-i}{3-i} = \frac{3+i^2-3i-i}{3^2+1^2} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$$

תרגיל 6.2. חשב:

1. $(1+i+i^2+i^3)^{100}$
2. נתון $z_2 = (1+2i)^2$ $z_1 = (4-3i)^3$. חשב את $|\frac{z_1}{z_2}|$.

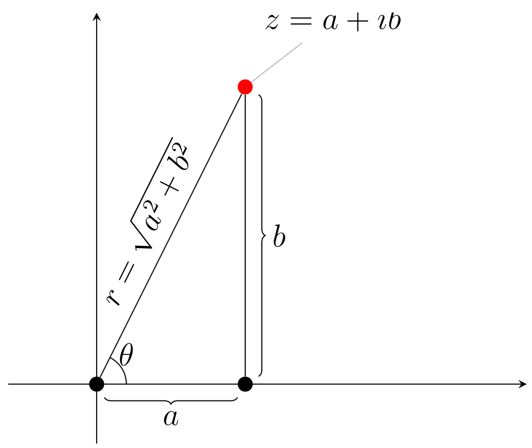
פתרון:

1. $1+i+i^2+i^3=1+i-1-i=0$ ולכן $(1+i+i^2+i^3)^{100}=0$.
2. אפשר לחשב במפורש את כל אחד מהמספרים, לחשב את המנה ואז את הערך המוחלט, אבל זה יצריך הרבה עבודה. לכן נשתמש בתכונות הערך המוחלט:

$$|\frac{z_1}{z_2}|=\frac{|z_1|}{|z_2|}=\frac{|(4-3i)^3|}{|(1+2i)^2|}=\frac{|4-3i|^3}{|1+2i|^2}=\frac{5^3}{5}=25$$

6.2 הצגה קוטבית של מספרים מרוכבים

בתרגיל הקודם דיברנו על זה וראינו שכפל וחזקות של מספרים מרוכבים מסובך בהצגה הזו (מה היה קורה אם צריך היה להעלות בחזקת 100 או לחשב את התרגיל הקודם בלי ערך מוחלט?). עכשיו נראה דרך אחרת לייצג מספרים מרוכבים בה יותר קל לכפול ולחלק מספרים מרוכבים. החסרון: החיבור והחיסור הופכים לבעייתיים....



כל מספר מרוכב (נקודה) מאופיינת על ידי שני גדלים: המרחק שלה מראשית הצירים והזווית שלה ביחס לציר הממשי:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{a^2+b^2} \\ \theta &= \arctan(b/a) \end{aligned}$$

ואז רושמים: $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ או בקיצור $r\cdot cis\theta$.

תרגיל 6.3. נהפוך את המספרים הבאים מהצגה אלגברית להצגה קוטבית (ר' שרטוט):

.1 $z_1 = 1+i$

$r=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$, $\theta=\arctan(1/1)=\pi/4$ ולכן $1+i=\sqrt{2}cis(\pi/4)$.

.2 $z_2 = -1-i$

$r=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$, $\theta=\arctan(-1/-1)=\pi/4$ ולכן $-1-i=\sqrt{2}cis(\pi/4)$**?**

לא, כי המספר נמצא ברביע הרביעי ולכן צריך להוסיף עוד $\pi=180^\circ$ מעלות לזווית ולכן $-1-i=\sqrt{2}cis(5\pi/4)$.

באופן כללי - חשוב לשים לב תמיד באיזה רביע המספר נמצא ולשנות את הזווית בהתאם.

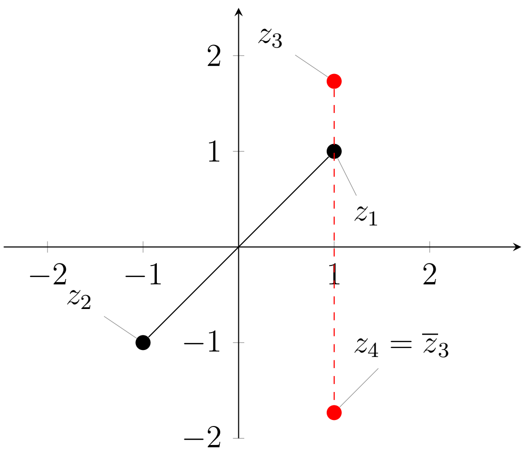
.3 $z_3 = 1+\sqrt{3}i$

$r=\sqrt{1+3}=2$, $\theta=\arctan(\sqrt{3})=\pi/3$ ולכן $1+\sqrt{3}i=2cis(\pi/3)$.

.4 $z_4 = 1-\sqrt{3}i$

$r=\sqrt{1+3}=2$, $\theta=\arctan(-\sqrt{3})=-\pi/3=5\pi/3$ ולכן $1-\sqrt{3}i=2cis(-\pi/3)$.

לכן למספרים צמודים אותו ערך מוחלט אבל הזוויות הן מינוס אחת של השניה.



***משפט** (כלל המכפלה).* *עבור $z_1=r_1cis\theta_1$ ו-$z_2=r_2cis\theta_2\neq 0$ מתקיים:*

$$\begin{aligned} z_1\cdot z_2 &= (r_1r_2)cis(\theta_1+\theta_2) \\ z_1/z_2 &= (r_1/r_2)cis(\theta_1-\theta_2) \end{aligned}$$

לכן קל מאוד לחשב מכפלות וחזקות של מספרים מרוכבים בהצגה טריגונומטרית.

תרגיל 6.4. חשב את $\left(\frac{1}{\cos\theta+i\sin\theta}\right)^{10}$

פתרון:

$$(\frac{\cos 0 + i\sin 0}{\cos\theta + i\sin\theta})^{10} = (\cos\theta - i\sin\theta)^{10} = \cos(10\theta) - i\sin(10\theta) = cis(-10\theta)$$

הגדרה. מנוסחאות הכפל מקבלים את נוסחת דה-מואבר:

$$z^n = r^n cis(n\theta)$$

6.2.1 שורשים של מספרים מרוכבים

באמצעות נוסחת דה-מואבר אפשר לחשב שורשים של מספרים מרוכבים. נניח כי אנחנו מעוניינים לפתור את המשוואה הבאה: $z^n = \rho cis\alpha$. נניח ש $rcis\theta$ פותר את המשוואה ונבדוק מה עליו לקיים.

- שלב 1: נפעיל ערך מוחלט על שני האגפים ונקבל $r^n = \rho$ כלומר בהכרח $r = \sqrt[n]{\rho}$. לכן לכל הפתרונות של המשוואה אותו ה-r.

  שאלה: "מה זה אומר על הפתרונות"?

תשובה: כולם על מעגל ברדיוס $\sqrt[n]{\rho}$

- שלב 2: כאשר מעגלים את $rcis\theta$ בחזקת n באגף שמאל הזווית מוכפלת ב-n וכדי שיהיה שוויון בין המספרים המרוכבים נדרוש שוויון בין הזוויות: $n\theta = \alpha$.

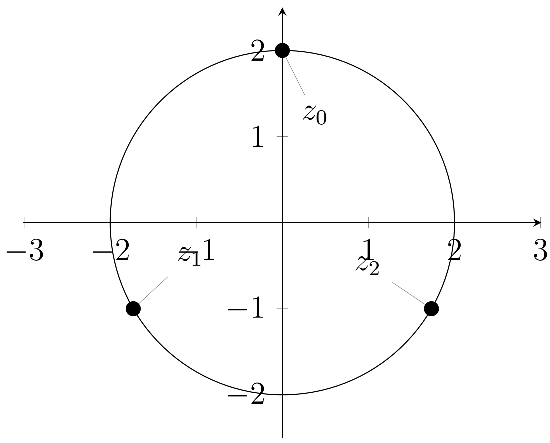
  נשים לב שאם מוסיפים לזווית עוד כפולה שלמה של 2π כלום לא משתנה (סיבוב שלם במעגל) ולכן $\theta = \frac{\alpha + 2\pi k}{n}$ כאשר $k = 0, 1, ..., n-1$ (עבור $k = n$ חוזרים כבר לפתרון שמצאנו).

תרגיל 6.5. חשב את הפתרונות של המשוואות הבאות:

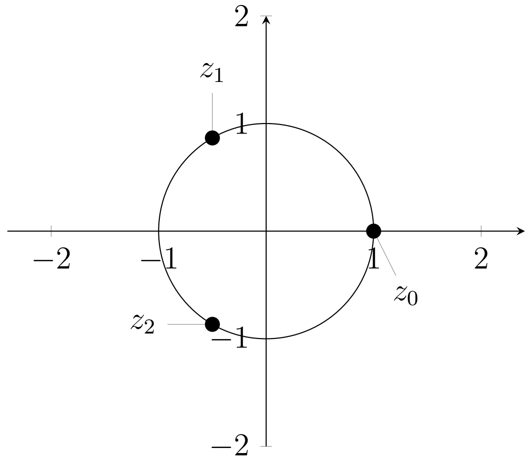
1. $z^3 = -8i$
2. $z^3 = 1$
3. $(1-i)z^5 - i = 0$

פתרון:

1. נעבור לצורה טריגונומטרית: $-8i = 8cis(\frac{3\pi}{2})$. לכן $r = \sqrt[3]{8} = 2$ ו- $\theta = \frac{3\pi/2 + 2\pi k}{3}$ ויש 3 פתרונות: $z_0 = 2cis(\frac{\pi}{2}), z_1 = 2cis(\frac{7\pi}{6}), z_2 = 2cis(\frac{11\pi}{6})$.



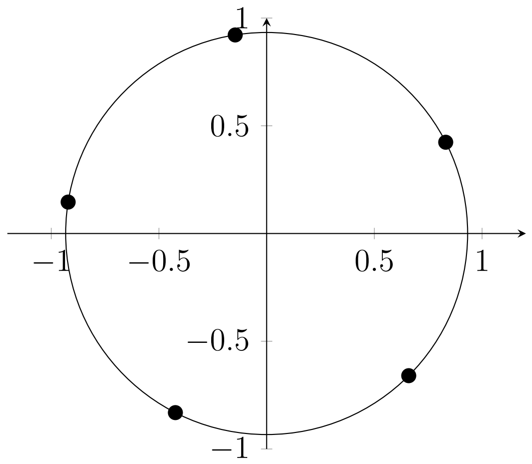
2. ב-$\mathbb{R}$ למשוואה הזו יש רק פתרון אחד. מסתבר שבמרוכבים יש עוד פתרונות:
$z^3 = 1cis(0)$ ולכן הפתרונות הם $\theta_k = \frac{2\pi k}{3}$ כלומר $z_0 = 1, z_1 = cis(\frac{2\pi}{3}), z_2 = cis(\frac{4\pi}{3})$.
כדאי לשים לב ש $z_1 = \overline{z_2}$ כי זו משוואה פולינומית במקדמים ממשיים.



3. נסדר את המשוואה:

$$z^5 = \frac{i}{1-i} = \frac{i(1+i)}{2} = \frac{i-1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}cis(\frac{3\pi}{4})$$

ולכן הפתרונות הם $z_k = \sqrt[-10]{2}cis(\frac{3\pi}{20} + \frac{2\pi k}{5})$.



התרגיל הקודם מדגים תוצאה חשובה - לכל מספר שונה מ-0 יש בדיוק n שורשים שונים מסדר n.

תרגיל 6.6. חשב את כל הפתרונות של המשוואה $z^3 = \overline{z}$

פתרון: נהפוך את המשוואה למשוואה הכוללת רק חזקות של z כדי שניתן יהיה להשתמש בדה-מואבר. ראשית, ברור ש$z = 0$ הוא פתרון. כעת, נכפול ב-z:

$$z^4 = |z|^2$$

נסמן $z = rcis(\theta)$ ונקבל $r^4 cis(4\theta) = r^2$. אנחנו מחפשים פתרונות שונים מפתרון האפס ולכן נצמצם ונקבל: $r^2 cis(4\theta) = 1$.

קיבלנו שוויון בין שני מספרים מרוכבים ולכן הזווית צריכה להיות שווה והרדיוס. לכן $r = 1$ וכן $4\theta = 0 + 2\pi k$. למשוואה יש 4 פתרונות: $\theta = \frac{\pi k}{2}$ עבור $k = 0, 1, 2, 3$ ולכן בסה"כ יש למשוואה המקורית חמישה פתרונות: $z = 0, \pm 1, \pm i$.

שאלה: האם לא היו אמורים להיות לכל היותר 3 פתרונות כי זו משוואה ממעלה 3?

תשובה: לא, כי זה לא פולינום, יש צמוד!

6.3 אלגברה לינארית עם מספרים מרוכבים

עכשיו אפשר לענות על שאלות הדומות לשאלות מהפרקים הקודמים, אבל מעל $\mathbb{C}$. למשל - $\mathbb{C}^n$ מרחב לינארי מעל $\mathbb{C}$ (כמו F^n) או לחשב דטרמיננטות ומערכות משוואות עם מספרים מרוכבים.

תרגיל 6.7. פתור את המערכת
$$\begin{cases} z_2+(1-i)z_3 &= 1\\ iz_1+z_2+z_3 &= 0\\ iz_1+iz_3 &= 1\end{cases}.$$

פתרון: כמו בפרק 1, נחליף שורות, נעבור לכתיב מטריצי ונדרג:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} i & 0 & i & 1\\ i & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1-i & 1\end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} i & 0 & i & 1\\ 0 & 1 & 1-i & -1\\ 0 & 1 & 1-i & 1\end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to R_3-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} i & 0 & i & 1\\ 0 & 1 & 1-i & -1\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{array}\right)$$

קיבלנו שורת סתירה ולכן למערכת אין פתרון.

תרגיל 6.8. האם הקבוצה $A=\{(1+i,3+8i,5+7i),(1-i,5,2+i),(1+i,3+2i,4-i)\}$ בת"ל (מעל $\mathbb{C}$)?

פתרון: כמו בפרק 2, נבדוק אילו סקלרים נותנים צ"ל מתאפס של הוקטורים, כלומר נציב אותם כעמודות במטריצה הומוגנית ונבדוק האם יש פתרון יחיד או לא.

$$\begin{pmatrix} 1+i & 1-i & 1+i\\ 3+8i & 5 & 3+2i\\ 5+7i & 2+i & 4-i\end{pmatrix} \xrightarrow[R_3\to R_3-\frac{5+7i}{1+i}R_1]{R_2\to R_2-\frac{3+8i}{1+i}R_1} \begin{pmatrix} 1+i & 1-i & 1+i\\ 0 & -3+3i & -6i\\ 0 & -5+6i & -1-8i\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-\frac{-5+6i}{-3+3i}R_2} \begin{pmatrix} 1+i & 1-i & 1+i\\ 0 & -3+3i & -6i\\ 0 & 0 & 3i\end{pmatrix}$$

קיבלנו 3 איברים פותחים לכן יש פתרון יחיד והוא בהכרח הפתרון הטריויאלי. לפיכך הקבוצה בת"ל.

תרגיל 6.9. האם המטריצה $A=\begin{pmatrix}1 & i\\ i & 1\end{pmatrix}$ הפיכה ב-$M_2(\mathbb{C})$? אם כן- מהי ההופכית?

פתרון: כמו בפרק 4, קל לבדוק הפיכות עם דטרמיננטה: $\det(A)=1-i^2=2\neq 0$ ולכן המטריצה הפיכה. כדי למצוא את ההופכית נשתמש בשיטה מפרק 3:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & i & 1 & 0 \\ i & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2-iR_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & i & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -i & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_1\to R_1-iR_2]{R_2\to\frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 & -i/2 \\ 0 & 1 & -i/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

בדיקה:

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = I_2$$

תרגיל 6.10. הוכח: לכל $w \in \mathbb{C}$ הדטרמיננטה $\begin{vmatrix} 1 & \overline{w} & \overline{w} \\ w & 1 & \overline{w} \\ w & w & 1 \end{vmatrix}$ היא מספר ממשי.

פתרון: נחשב ישירות לפי ההגדרה:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & \overline{w} & \overline{w} \\ w & 1 & \overline{w} \\ w & w & 1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & \overline{w} \\ w & 1 \end{vmatrix} - \overline{w}\begin{vmatrix} w & \overline{w} \\ w & 1 \end{vmatrix} + \overline{w}\begin{vmatrix} w & 1 \\ w & w \end{vmatrix} \\ &= \underbrace{(1-w\overline{w})}_{\text{real}} - \overline{w}(w-w\overline{w}) + \overline{w}(w^2-w) \\ &= real - w\overline{w} + w\overline{w}^2 + w^2\overline{w} - w\overline{w} \\ &= real + w\overline{w}(w+\overline{w}) \\ &= real \end{aligned}$$

כנדרש.

תרגיל 6.11. הוכיחו שאם מצמידים את כל האיברים במטריצה, אז הדטרמיננטה תהיה הצמודה: $|\overline{A}| = \overline{|A|}$.

פתרון: זה נכון באופן טריוויאלי ל-$n=1$. נניח שזה נכון לכל מטריצה מסדר $n \times n$ ונוכיח למטריצה מסדר $n+1 \times n+1$. נפתח לפי השורה הראשונה:

$$|\overline{A}| = \sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{1+i}|\overline{A_{1i}}|\overline{a_{1i}} \overset{ind\,hyp}{=} = \sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{1+i}\overline{|A_{1i}|}\overline{a_{1i}} = \overline{\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{1+i}A_{1i}a_{1i}} = \overline{|A|}$$

בעיה. (למחשבה) מצד אחד, למדנו $i^2 = -1$. מצד שני

$$i^2 = i \cdot i = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$$

אז מה הערך האמיתי? ומה עשינו לא בסדר?

6.4 פולינומים

פולינום מעל שדה F הוא ביטוי מהצורה $P(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ כאשר $a_i \in F$ מקדמי הפולינום. $a_n \neq 0$ הוא המקדם העליון ומעלת הפולינום היא n.

פולינומים הם אובייקטים מתמטיים, בדיוק כמו מטריצות, או וקטורים ונתייחס אליהם ככאלה. נכון שאפשר להציב ערך במשתנה x ולקבל מספר, אבל פולינום הוא לא מספר ולא פונקציה בהקשר הזה.

מסמנים $F[x]$ קבוצת כל הפולינומים מעל F, $F_n[x]$ כל הפולינומים ממעלה קטנה ממש מ-n.

בפרק 6.7 דנים בפעולות על פולינומים כמו שוויון, סכימה, כפל וכו'. אנחנו נתמקד היום בחילוק פולינומים, טכניקה שתשמש אותנו לעיתים ביחידות הבאות.

משפט. *עבור $P(x), S(x) \neq 0 \in F[x]$ קיים זוג יחיד של פולינומים $Q(x), R(x) \in F[x]$ המקיים:*

1. $P(x) = Q(x)S(x) + R(x)$.
2. מעלת $R(x)$ קטנה ממש ממעלת $S(x)$.

הפולינום $Q(x)$ נקרא המנה של $P(x)$ ב- $S(x)$ ו-$R(x)$ היא השארית.

דוגמה. חלק את הפולינום $P(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$ בפולינום $S(x) = x^2 - 1$.

פתרון: בכל שלב אנחנו מנסים לאפס את המקדם העליון של מה שנשאר וצריכים לשאול - בכמה צריך להכפיל את הפולינום בו מחלקים כדי להיפטר מהמקדם העליון של מה שנשאר?

$$\begin{array}{r|l} & \quad 4X+3 \\ \hline X^2-1 & 4X^3+3X^2+2X+1 \\ & -4X^3 \qquad\quad +4X \\ \hline & \qquad 3X^2+6X+1 \\ & \qquad -3X^2 \qquad +3 \\ \hline & \qquad\qquad 6X+4 \end{array}$$

לכן $P(x)=(4x+3)Q(x)+(6x+4)$.

הגדרה. **כאשר $P(\alpha)=0$ אומרים ש-α הוא שורש של הפולינום ואז $P(x)$ מתחלק ב-$(x-\alpha)$ ללא שארית.**

תרגיל 6.12. **מצא את כל שורשי הפולינום $P(x)=x^3+x^2-x-1$.**

פתרון: אנחנו לא מעוניינים להשתמש בנוסחא המסובכת לשורשים של משוואה ממעלה שלישית. במקום זה, נשים לב כי $P(1)=0$. לכן נחלק ונקבל פולינום ממעלה 2:

$$\begin{array}{r|l} & \qquad X^2+2X+1 \\ \hline X-1 & X^3 \;+X^2 \;-X-1 \\ & -X^3 \;+X^2 \\ \hline & \qquad 2X^2 \;-X \\ & \quad -2X^2+2X \\ \hline & \qquad\qquad X-1 \\ & \qquad\quad -X+1 \\ \hline & \qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

ולכן $x^3+x^2-x-1=(x-1)(x^2+2x+1)=(x-1)(x+1)^2$ ולכן כל שורשי הפולינום הם $x=\pm1$. אומרים ש$x=-1$ הוא שורש כפול של הפולינום (כי מופיע פעמיים בפירוק) או שיש לשורש ריבוב (אלגברי) 2.

תרגיל 6.13. **מצא את כל שורשי הפולינום $P(x)=x^4-10x^3+38x^2-64x+40$ מעל המרוכבים . רמז: $x_1=3+i$ הוא אחד השורשים.**

נשים לב שאנחנו יודעים רק שורש אחד ולכן חילוק בו יוריד רק מעלה אחת למעלה שלישית. אבל, מדובר על פולינום במקדמים ממשיים ולכן גם הצמוד, $x_2=3-i$, הוא שורש של הפולינום. לכן הפולינום מתחלק ב-$(x-x_1)(x-x_2)=x^2-6x+10$:

$$
\begin{array}{r|l}
 & X^2 \quad -4X \quad +4 \\
\cline{2-2}
X^2-6X+10 & X^4-10X^3+38X^2-64X+40 \\
 & -X^4 \quad +6X^3-10X^2 \\
\cline{2-2}
 & \qquad -4X^3+28X^2-64X \\
 & \qquad\ \ 4X^3-24X^2+40X \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad 4X^2-24X+40 \\
 & \qquad\qquad -4X^2+24X-40 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

ולכן שני השורשים האחרים הוא בעצם שורש אחד כפול: $x_3 = 2$.

לעבור על הממ"ן והממ"ח הקרובים ולדבר על השאלות שאפשר לפתור.

7 מרחבים לינאריים

בשני הפרקים הבאים אנחנו מכלילים את פרק 2 ודנים במרחבים לינארים כלליים ולא רק F^n. האבטיפוס להגדרה הוא $\mathbb{R}^n$ מעל המספרים הממשיים.

המושגים שכבר הכרנו ונרחיב אותם הם קבוצה פורשת, קבוצה בת"ל/ת"ל ובסיסים ולאחר מכן נתקדם הלאה.

הגדרה (7.1.1). קבוצה V היא מרחב לינארי מעל השדה F עם פעולת החיבור וכפל בסקלר אם מתקיים:

1. סגירות: לכל $\underline{v}, \underline{u} \in V, \lambda \in F$ מתקיים $\underline{v} + \underline{u}, \lambda\underline{v} \in V$.
2. אסוציאטיביות: $(\underline{v} + \underline{u}) + \underline{w} = v + (u + \underline{w})$ וגם $(\alpha\beta)\underline{v} = \alpha(\beta\underline{v})$.
3. חילופיות: $\underline{v} + \underline{u} = \underline{u} + \underline{v}$.
4. קיום נייטרלי: קיים $\underline{0} \in V$ כך ש-$\underline{u} + \underline{0} = \underline{u}$ לכל $\underline{u}$.
5. קיום נגדי: לכל $\underline{u}$ קיים $\underline{v}$ כך ש- $\underline{u} + \underline{v} = \underline{0}$.
6. פילוג:
   א) כפל מעל חיבור וקטורי: $\lambda(\underline{v} + \underline{u}) = \lambda\underline{v} + \lambda\underline{u}$.
   ב) כפל מעל חיבור סקלרים: $(\alpha + \beta)\underline{u} = \alpha\underline{u} + \beta\underline{u}$.
7. איבר הזהות $1 \in F$ מקיים $1\underline{u} = \underline{u}$ לכל $\underline{u}$.

דוגמה. :

- $\mathbb{R}^n$ מעל $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}^n$ מעל $\mathbb{Q}$ ובאופן כללי F^n מעל השדה F. (גם ל-$n = 1$. כל שדה הוא מ"ל מעל עצמו).
- גם $M_{m\times n}(F)$ הוא מ"ל מעל F עם סכום וכפל מטריצות (דוגמא ג בספר).
- מרחב לינארי לא חייב להראות כמו "סקלרים של F מסודרים בוקטור/מטריצה" ויש דוגמאות אחרות לכך. למשל - $\mathbb{R}$ מעל $\mathbb{Q}$ (דוגמא ב בספר).
- מרחבי הפולינומים $F[x], F_n[x]$ מעל F.

תרגיל 7.1. האם אלו מ"ל?

1. $\mathbb{R}^n$ מעל $\mathbb{R}$ עם הכפל הרגיל והחיבור המוגדר על ידי $\underline{u}_1 \oplus \underline{u}_2 = \underline{u}_1 - \underline{u}_2$.
2. $\mathbb{Q}$ מעל $\mathbb{R}$ עם הפעולות הרגילות?
3. $\mathbb{C}$ מעל $\mathbb{R}$? $\mathbb{C}^n$ מעל $\mathbb{R}$?

פתרון:

1. לא, כי אין חילופיות.
2. לא, כי אין סגירות. (שאלה 7.1.2 בספר).
3. כן וכן. דוגמא ב' בספר. במיוחד סעיף ג' ושאלה 7.1.2: כל שדה הוא מ"ל מעל תת-שדה שלו וכל מ"ל מעל שדה הוא גם מ"ל מעל תת-שדה של השדה.

בפרק 7.2 מוצגות תכונות בסיסיות של מ"ל שדומות מאוד לתכונות הבסיסיות שאנחנו מכירים מ-$\mathbb{R}^n$, למשל $\lambda\underline{u}=\underline{0}$ אם"ם $\lambda=0$ או $\underline{u}=\underline{0}$.

7.1 תתי מרחבים

הגדרה (7.3.1). V מ"ל מעל F, $W\subseteq V$. אם W גם מ"ל מעל F (עם אותן פעולות!) אומרים שהוא תת-מרחב של V.

***משפט* (7.3.2).** *עקרונית, צריך לבדוק את כל התכונות כדי לקבוע אם קבוצה היא תת-מרחב, אבל בזכות המשפט* מספיק לבדוק רק שלושה דברים:

1. $W\neq\emptyset$.
   שאלה: "למה? איזה איבר חייב להיות ב-W?"
   תשובה: מדרישת הקיום, לכל הפחות $\underline{0}\in W$.
2. W סגור לחיבור וקטורי.
3. Wסגור לכפל בסקלרים מתוך F.

כל שאר התכונות מתקיימות ממילא כי זו אותה פעולה כמו ב-V. הגירסא המקוצרת:

***משפט* (*'2.3.7*).** $\emptyset\neq W\subseteq V$ *תת מרחב של* V *אם"ם לכל* $\lambda_1,\lambda_2\in F$ *ולכל* $\underline{u},\underline{v}\in W$ *גם* $\lambda_1\underline{v}+\lambda_2\underline{u}\in F$.

הערה. מרחב האפס $\{\underline{0}\}$ הוא תת המרחב הקטן ביותר של כל מ"ל.

תרגיל 7.2. האם קבוצות אלו הן מרחבים לינאריים?

1. W_1 קבוצת פתרונות של המערכת ההומוגנית $A\underline{x}=\underline{0}$ כאשר $A\in M_{m\times n}(F)$.
2. W_2 - קבוצת הפולינומים ממעלה 5 מעל F.
3. $W_3=\{p(x)\in\mathbb{R}[x]|p(0)=5\}$.
4. $W_4=\{(x_1,x_2,0,x_4,...,x_n)\in F^n\{$ עבור $n>3$.
5. $W_5=\{A\in M_n(F)|\det(A)\neq 0\}$.
6. $W_6=\{(z,\overline{z})\in\mathbb{C}^2\}$.

7. $W_7 = W_6$ אבל מעל השדה $\mathbb{R}$.
8. $W_8 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 2x - 5z = 4y + 3x + z\}$.
9. $W_9 = \{(x, y) | x, y > 0\}$ **עם פעולת החיבור** $(x, y) \oplus (z, w) = (xz, yw)$ **וכפל בסקלר** $\lambda \odot (x, y) = (x^\lambda, y^\lambda)$ **מעל** $\mathbb{R}$.
10. $W_{10} = \{p(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbb{Z}_5[x] | a = b^5\}$

פתרון: דרך הצגת הפתרון: להציג כל קבוצה בנפרד, לשאול תת קבוצה של איזה מרחב היא, ואז להראות את התכונה ביחס לתת המרחב הזה. אחרת - צריך להוכיח את כל התכונות לקבוצה!

1. כן. $W_1 \subseteq F^n$ ראינו בפרק 1 שסכום של פתרונות של מערכת הומוגנית הוא פתרון וגם כפל בסקלר הוא פתרון.
   שאלה: "האם זה מספיק?"
   תשובה: לא, צריך גם להוכיח שלא ריקה. במקרה הזה - לא ריקה כי תמיד קיים פתרון טריויאלי.
2. לא. $W_2 \subseteq F[x]$ אבל לא סגורה לסכומים. למשל $x^5, -x^5 \in W_2$ אבל לא סכומם.
3. לא. $W_3 \subseteq F[x]$ אבל לא סגורה לסכומים וכפל בסקלר. למשל $x + 5 \in W_3$ אבל לא $2(x + 5)$.
4. כן. תת מרחב של F^n, הוכחה סטנדרטית ודומה לשאלה 7.3.4.
5. לא. זו קבוצת מטריצות הפיכות חלקית ל-$M_n(F)$, אבל סכום מט' הפיכות לאו דווקא הפיך ומטריצת האפס לא כלולה כאן.
6. לא תת מרחב של $\mathbb{C}^2$ מעל $\mathbb{C}$. למשל $(1, 1) \in W_6$ ו-$\lambda = i$ מקיים $i(1, 1) = (i, i) \notin W_6$.
7. כן. זהו תת מרחב של $\mathbb{C}^2$ מעל $\mathbb{R}$. הוכחה סטנדרטית כאשר משתמשים בכך שעבור $\lambda \in \mathbb{R}$ מתקיים $\overline{\lambda} = \lambda$ ובתכונות הצמוד.
   שני הסעיפים הללו ממחישים תוצאה חשובה: להיות מ"ל זו לא רק תכונה של הקבוצה עצמה אלא גם של הפעולות ושל השדה שמעליו עובדים..
8. כן. כשמסדרים מחדש את התנאי זו בעצם מערכת של משוואה אחת הומוגנית והראנו בסעיף הראשון של השאלה שזהו מ"ל.
9. אמנם מדובר על תת קבוצה של $\mathbb{R}^2$ אבל שינינו את הפעולות ולכן אי אפשר להשתמש במשפט 7.3.2 אלא יש לבדוק את כל התכונות:
   א) סגירויות מתקיימות באופן טריוויאלי.
   ב) קיבוציות: $((x, y) \oplus (z, w)) \oplus (a, b) = (xza, ywb) = (x, y) \oplus ((z, w) \oplus (a, b))$ וכן $a \odot (b \odot (x, y)) = ((x^b)^a, (y^b)^a) = (x^{ba}, y^{ba}) = (ba) \odot (x, y)$.
   ג) הפעולה $\oplus$ חילופית כי הכפל הרגיל חילופי.
   ד) קיים נייטרלי: $(x, y) \oplus (1, 1) = (x1, y1) = (x, y)$. לכן הנייטרלי לחיבור הינו $(1, 1)$.
   ה) קיום נגדי: לכל $(x, y) \in W_9$ גם $(x^{-1}, y^{-1}) \in W_9$ ומתקיים $(x, y) \oplus (x^{-1}, y^{-1}) = (1, 1)$ כנדרש.

ו) פילוג:

i. $\lambda \odot ((x,y) \oplus (z,w)) = \lambda \odot (xz, yw) = ((xz)^\lambda, (yw)^\lambda) = (x^\lambda z^\lambda, y^\lambda w^\lambda) =$ $(\lambda \odot (x,y)) \oplus (\lambda \odot (z,w))$.

ii. $(a+b) \odot (x,y) = (x^{a+b}, y^{a+b}) = (x^a x^b, y^a y^b) = (a \odot (x,y)) \oplus (b \odot (x,y))$

ז) איבר הזהות $1 \in \mathbb{R}$ מקיים $1(x,y) = (x^1, y^1) = (x,y)$.

ח) כל התכונות מתקיימות ולכן מדובר על מרחב לינארי.

10. הקבוצה בבירור לא ריקה. יהי $p(x) = ax^2 + bx + c \in W_{10}$ ויהי $\lambda \in \mathbb{Z}_5$. מתקיים $a = b^5$ ונבדוק סגירות לכפל בסקלר:

$$\lambda p(x) = \lambda a x^2 + \lambda b x + \lambda c = \lambda b^5 x^2 + \lambda b x + \lambda c$$

וכדי ש-$\lambda p(x)$ יהיה ב-W_{10} צריך להתקיים $\lambda b^5 = (\lambda b)^5$ אבל $(\lambda b)^5 = \lambda^5 b^5$ והגענו לביטויים שונים לכן הצורה לא מתאימה והקבוצה אינה מרחב לינארי.
האם ההוכחה נכונה?

לא! אמנם הביטויים נראים שונים מבחינת נוסחאות, אבל שימו לב לכך ש:

$$0^5 = 0 \; 1^5 = 1 \; 2^5 = 32 = 2 \; 3^5 = 243 = 3 \; 4^5 = 1024 = 4$$

כלומר לכל $\lambda \in W_{10}$ מתקיים $\lambda^5 = \lambda$ ובעצם הטענה כן נכונה!
מסקנה חשובה: גם אם הביטויים נראים שונים, כדאי לבדוק ולהציב מספרים ובאופן כללי כדאי להפריך עם דוגמא נגדית ולא עם טיעון כללי. נבדוק גם סגירות לחיבור. יהיו $p(x) = ax^2 + bx + c, q(x) = dx^2 + ex + f \in W_{10}$. לכן $a = b^5, d = e^5$. נחשב אם גם הסכום מהצורה הזו:

$$p(x) + q(x) = (a+d)x^2 + (b+e)x + d + f = (b^5 + e^5)x^2 + (b+e)x + d + f$$

לפי הבדיקה מקודם ראינו שתמיד $b^5 + e^5 = b + e = (b+e)^5$ כלומר גם הסכום מהצורה של W_{10} והקבוצה סגורה לחיבור ומהווה מרחב לינארי.

7.2 צירופים לינאריים וSpan

במשפט 7.3.2 רואים שתת-מרחב סגור לצירופים לינאריים: סכום של וקטורים מתוכו נמצא גם בתוכו וכפל של סקלר בוקטור מתוכו נמצא גם בתוכו. לכן אם ניקח סתם קבוצה ונסתכל על כל הצירופים הלינאריים שלה, נקבל את תכונת הסגירות ונקבל תת מרחב.

הגדרה. יהי V מ"ל מעל F, $K \subseteq V$ תת-קבוצה כלשהי. מגדירים $Span(K) = sp(K)$ את אוסף כל הצירופים הלינאריים של וקטורי K. אוסף זה הוא תת מרחב של V.

הערה. צירוף לינארי תמיד יכיל מספר סופי של וקטורים!

משפט (1.5.7). *מתקיים $K \subseteq sp(K)$ וזהו התת מרחב הקטן ביותר שמכיל את K, כלומר אם W תת מרחב המקיים $K \subseteq W$ אז גם $sp(K) \subseteq W$.*

הגדרה (7.5.2). אם $U = sp(K)$ אומרים ש-K קבוצה פורשת של U ולחילופין U נפרש על ידי K.

חשוב להדגיש שנדרש שוויון ולא הכלה $U \subseteq sp(K)$ שכן זו טעות נפוצה אצל סטודנטים (למצוא קבוצה שפורשת יותר מאשר את U ולטעון שהיא פורשת "בפרט" את U).

דוגמה. :

1. $\mathbb{R}^3 = sp\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$
2. $\{(0,y,z)|y,z \in \mathbb{R}\} = sp\{(0,1,0),(0,0,1)\}$
3. $$M_{m\times n}(F) = sp\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{m\times n} \dots\right\} = sp\{E^{(1,1)}, E^{(1,2)}, \dots\}$$
כאשר $E^{(i,j)}$ זו מטריצה עם **1** במקום ה-i,j ו-**0** בכל מקום אחר.
4. $F_n[x] = sp\{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}\}$

תרגיל 7.3. הוכח כי הקבוצות הבאות הן תתי מרחבים של מ"ל ידוע ומצא קבוצה פורשת סופית לכל אחד:

1. W_1 - קבוצת הפתרונות של המערכת $\begin{cases} 2x - y + z + t &= 0 \\ -x + y + z &= 0 \\ x + y - z + 2t &= 0 \\ x + t &= 0 \end{cases}$.
2. $W_2 = \{p(x) \in \mathbb{R}_4[x] | p(1) = p(-1)\}$.

לפני הפתרון, נסביר את השיטה הכללית:

1. למצוא את האיבר הכללי במרחב הלינארי.
2. לרשום את האיבר הכללי כצ"ל, כאשר כל סקלר פרמטרי מופיע רק פעם אחת.
3. הקבוצה הפורשת היא הוקטורים המופיעים בצירוף הלינארי.
4. לפי משפט **7.5.1** זהו מ"ל.

פתרון:

1. נפעל לפי השיטה:

א) מציאת איבר כללי:
פותרים את מערכת המשוואות... מקבלים אינסוף פתרונות מהצורה $(-t,-t,0,t)$.

ב) רישום כצ"ל:
$t(-1,-1,0,1)$.

ג) ולכן $W_1 = sp\{(-1,-1,0,1)\}$.

2. נפעל לפי השיטה:

א) מציאת איבר כללי:
יהי $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \in W_2$. לכן $p(1) = p(-1)$ כלומר $a+b+c+d = -a+b-c+d$ ולכן $a = -c$.
לכן האיבר הכללי במרחב הוא: $p(x) = ax^3 + bx^2 - ax + d$.

ב) רישום כצ"ל:
$p(x) = a(x^3 - x) + bx^2 + d$.

ג) ולכן $W_2 = sp\{x^3 - x, x^2, 1\}$.

טענה. תכונות של $span$:

1. אם U מ"ל אז $U = sp(U)$ (שאלה 7.5.8)
2. לכן $sp(sp(K)) = sp(K)$.
3. $sp(K)$ לא משתנה מביצוע פעולות אלמנטריות על הוקטורים (שאלה 7.5.11). למשל: $sp\{e_1, e_2\} = sp\{e_1 + e_2, 7e_2\}$.

תרגיל 7.4. נגדיר $S = \{(1,2,3),(2,2,1)\}$, $T = \{(2,3,-1),(3,0,-2)\}$. האם $sp(S) = sp(T)$?

פתרון: יש שתי דרכים לפתור את השאלה.

1. לפי משפט 7.5.4 $sp(S) = sp(T)$ אם"ם $S \subseteq sp(T)$ וגם $T \subseteq sp(S)$.
כדי לבדוק כל אחד מהתנאים צריך לבדוק האם כל וקטור ב-S ניתן לרישום כצ"ל של וקטורים ב-T ולהפך.
זה אפשרי, אבל מצריך פתרון של 4 מערכות משוואות ולא נוח כאשר מספר הוקטורים המעורב גדול יותר. נשאיר דרך זו לקורא החרוץ.

2. נסתכל על המטריצות $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. נגדיר בתור W_A^R את המרחב הנפרש על ידי שורות A. שורות אלו הן בדיוק הוקטורים של S ולכן $W_A^R = sp(S)$ ובאותו אופן $W_B^R = sp(T)$.

מרחבי השורות שווים אם"ם המטריצות שקולות שורות (עד כדי תוספת של שורות אפסים) וכדי לבדוק זאת נדרג אותן דירוג קנוני:

$$A \xrightarrow{R_2\to R_2-2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2\to -\frac{1}{2}R_2]{R_1\to R_1+R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 5/2 \end{pmatrix}$$

ובאותה צורה

$$B \xrightarrow{R_1\to R_1-R_2} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_1\to -R_1]{R_2\to R_2+3R_1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 9 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_1\to R_1+3R_2]{R_2\to \frac{1}{9}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & 1/9 \end{pmatrix}$$

קיבלנו צורות קנוניות שונות ולכן המטריצות לא שקולות שורות ולכן המרחבים שונים $sp(S) \neq sp(T)$.

תרגיל 7.5. הוכח כי $sp\{v_1, v_2, v_3\} = sp\{v_1+v_2, v_2+v_3, v_1+v_3\}$.   רק במוגברת

פתרון: נשתמש בכך שפעולות אלמנטריות לא משנות את ה$span$ ולכן:

$$sp\{v_1, v_2, v_3\} \overset{M_1\to M_1+M_2}{=} sp\{v_1+v_2, v_2, v_3\} \overset{M_2\to M_2+M_3}{=} sp\{v_1+v_2, v_2+v_3, v_3\} =$$

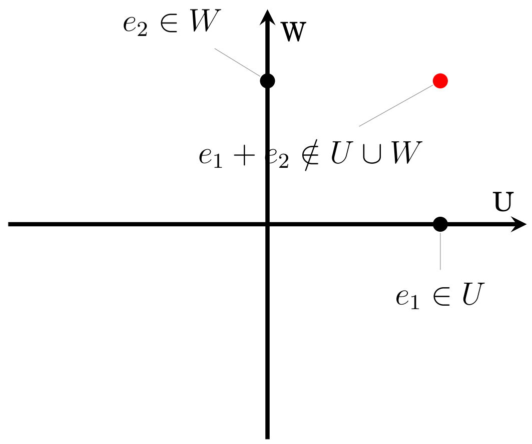
$$\overset{M_3\to 2M_3}{=} sp\{v_1+v_2, v_2+v_3, 2v_3\} \overset{M_3\to M_3+M_1-M_2}{=} sp\{v_1+v_2, v_2+v_3, v_1+v_3\}$$

ולכן המרחבים הליניאריים שווים.

7.3 סכום של תתי מרחבים

שאלה: יהיו $U, W \subseteq V$ מרחבים ליניאריים. האם $U \cap W$ הוא מרחב ליניארי? (כן).
האם $U \cup W$ הוא מרחב ליניארי? (בד"כ לא).

דוגמה. נבחר $V = \mathbb{R}^2$, $U = sp\{e_1\}, W = sp\{e_2\}$. מתקיים $e_1, e_2 \in U \cup W$ אבל $e_1 + e_2 \neq U \cup W$.
לכן זה לא תת מרחב כי לא סגור לחיבור!



משפט. *לפי שאלה 7.6.2 $U \cup W$ מרחב ליניארי אם"ם $W \subseteq U$ או להפך.*

במקום פעולת איחוד אנחנו צריכים פעולה אחרת שתייצר מרחבים ליניאריים גדולים יותר והיא סכום:

הגדרה (7.6.1 ו-7.6.2). הסכום של המרחבים הלינאריים U, W מוגדר על ידי

$$U + W = \{u + w | u \in U, w \in W\}$$

וזהו מרחב ליניארי.

דוגמה. בהמשך לדוגמא הקודמת: $U + W = \mathbb{R}^2$.

שתי תוצאות חשובות:

1. המרחב $U + W$ הוא המרחב הקטן ביותר המקיים $U, W \subseteq U + W$ (משפט 7.6.2).
2. אם $U = sp(S), W = sp(T)$ אז $U + W = sp\{S \cup T\}$ (שאלה 7.6.8)

תרגיל 7.6. נגדיר

$$\begin{aligned} W_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} a & -a \\ b & c \end{pmatrix} | a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \\ W_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -a & c \end{pmatrix} | a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

האם $W_1 + W_2 = M_2(\mathbb{R})$?

פתרון: נמצא קבוצות פורשות:

$$\begin{pmatrix} a & -a \\ b & c \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ולכן $W_1 = sp\left\{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$. באותה צורה

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -a & c \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ולכן $W_2 = sp\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$.
נחשב את הסכום:

$$\begin{aligned} W_1 + W_2 &= sp\left\{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E^{(2,1)}, E^{(2,2)}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, E^{(1,2)}, \cancel{E^{(2,2)}}\right\} \\ &\overset{M_1 \to M_1 + M_5}{=} sp\left\{E^{(1,1)}, E^{(2,1)}, E^{(2,2)}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, E^{(1,2)}\right\} = M_2(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

הגדרה (7.7.1). $U, W \subseteq V$ מרחבים לינאריים. $U + W$ הוא סכום ישר אם ורק אם מתקיים $U \cap W = \{0\}$.
במקרה כזה מסמנים $U \oplus W$.
תנאי שקול: כל וקטור ב-$U + W$ ניתן להצגה יחידה כסכום של וקטורים, אחד מ-U ואחד מ-W.

דוגמה. האם הסכום מהשאלה הקודמת הוא ישר?
הראנו ש$W_1 + W_2 = M_2(\mathbb{R})$. כדי לדעת האם הסכום ישר צריך לבדוק את החיתוך. $E^{(2,2)} \in W_1 \cap W_2$
ולכן הסכום לא ישר.

תרגיל 7.7. האם $\mathbb{R}_3[x] = U \oplus W$ כאשר $U = sp\{x^2 - x, x + 1\}$ ו-$W = sp\{x, x + 3\}$?

פתרון: אנחנו צריכים לבדוק שני דברים:

1. $U + W = \mathbb{R}_3[x]$.
2. $U \cap W = \{0\}$

נרשום את W בצורה יותר פשוטה: $W = sp\{x, x+3\} = sp\{x, 3\} = sp\{x, 1\}$ ולכן $x + 1 \in W \cap U$ והסכום לא ישר.

בדיקה ישירה: מחפשים $p(x) \in U \cap W$ לכן קיימים סקלרים $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ כך ש- $p(x) = a(x) + b(x+3) = c(x^2 - x) + d(x+1)$. נעביר אגפים ונקבל את המשוואה:

$$-cx^2 + (a+b+c-d)x + (3b-d) = 0$$

זהו שוויון בין הפולינומים ולכן כל המקדמים צריכים להיות זהים למקדמים של פולינום האפס:

$$\begin{cases} c & = 0 \\ a+b+c-d & = 0 \\ 3b-d & = 0 \end{cases}$$

מקבלים מערכת הומוגנית אם 3 משוואות, 4 נעלמים, מקבלים שיש אינסוף פתרונות ולכן יש אינסוף פולינומים שקיימים בחיתוך.

הערה. כאשר $v \in U + W$ המשמעות היא שקיימים $u \in U, w \in W$ כך ש-$v = u + w$. המשמעות היא לא ש $v \in U$ או $v \in W$ (טעות נפוצה). כמו כן, אם נתון $v \notin U$ אין זה אומר שבהכרח $v \in W$!

כאשר נתון ש$v \in U \oplus W$ המשמעות היא שu, w הם היחידים!

הערה. סכום ישר אינה פעולת חשבון. אי אפשר להגיד "ניקח את U, W ונסכום אותם סכום ישר". אפשר להחליט לסכום אותם ולבדוק האם הסכום הוא ישר או לא (כמו שאי אפשר להגיד "נחלק את 5 ב-2 בלי שארית" אלא רק "נחלק את 5 ב-2" ושארית היא משהו שנקבל אחרי התהליך).

הערה. אין חיסור מרחבים לינאריים. לכן אין גם חוקי צמצום: $U + W = U + V$ לא גורר $W = V$. גם לא אם הסכום הוא סכום ישר.

לעבור על הממ"ן והממ"ח הקרובים ולדבר על השאלות שאפשר לפתור.

8 בסיסים ותורת המימד

בפרק הזה אנחנו מכלילים מושגים מפרק 2 (תלות לינארית ובסיס. בפרישה דנו בפרק הקודם) למרחבים לינאריים כלליים וממשיכים לדיון רחב יותר במרחבים לינאריים.

8.1 תלות ובסיסים

8.1.1 תלות לינארית

הגדרה (8.1.1). יהי V מ"ל, K תת קבוצה. אומרים ש-K בלתי תלויה לינארית אם:

- אם K סופית, ההגדרה כמו ב-F^n: כל צירוף לינארי מתאפס של איברי K חייב להיות הטריוויאלי:

$$\lambda_1\underline{v}_1 + ... + \lambda_n\underline{v}_n = \underline{0} \Rightarrow \lambda_1, ..., \lambda_n = 0$$

- אם K אינסופית, היא בת"ל אם כל תת קבוצה סופית שלה בת"ל.

דוגמה. :

1. הקבוצה $\{1, x, x^2, ...\} \subseteq \mathbb{R}[x]$ בת"ל.
2. הקבוצה $\{x^3 - x + 1, 2x^2 - 1, x^2 + x\} \subseteq \mathbb{R}[x]$ בת"ל.
3. וקטורי שורות של מטריצה מדורגת (שאינם שורות האפסים) הם בת"ל.
   שאלה: האם וקטורי העמודות של מטריצה מדורגת הן בת"ל?
   תשובה: לא בהכרח. למשל

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

הערה. הערות חשובות (בדומה לפרק 2):

1. קבוצה עם וקטור אחד ת"ל אם"ם זהו וקטור האפס.

2. 2 וקטורים ת"ל אמ"ם הם פרופורציוניים.
3. תת קבוצה של קבוצה בת"ל היא בת"ל.
4. קבוצה המכילה קבוצה ת"ל היא ת"ל.

תרגיל 8.1. נגדיר $v_1 = (1-i, 3+i), v_2 = (1, 1+2i) \in \mathbb{C}^2$. האם הוקטורים בת"ל מעל $\mathbb{C}$? האם בת"ל מעל $\mathbb{R}$?

פתרון: כדי שהוקטורים יהיו ת"ל הם צריכים להיות פרופורציוניים, לכן מחפשים סקלר λ כך ש-$v_1 = \lambda v_2$. מהרכיב הראשון ברור שאם יש כזה סקלר, הוא בהכרח $\lambda = 1 - i$. נבדוק את הרכיב השני:

$$(1-i)(1+2i) = ... = 3+i$$

ואכן מתקיים $v_1 = (1-i)v_2$ לכן הוקטורים ת"ל מעל $\mathbb{C}$.

לעומת זאת מעל $\mathbb{R}$ אין כזה סקלר (כי בהכרח הסקלר הוא $1-i$) ולכן מעל $\mathbb{R}$ הוקטורים בת"ל.

מסקנה. *תלות לינארית היא לא רק תכונה של הוקטורים אלא גם תכונה של השדה מעליו אנחנו עובדים, כי הוא קובע מאיפה לוקחים את הסקלרים עבור הצירוף הלינארי!*

תרגיל 8.2. האם הפונקציות הבאות תלויות לינארית מעל $\mathbb{R}$?

1. $f(x) = \sin(x), g(x) = \cos(x), h(x) = x^2$.
2. $f(x) = 5, g(x) = \sin^2(x), h(x) = \cos^2(x)$

פתרון:

1. נרשום צ"ל מתאפס: $\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x) + \lambda_3 h(x) = 0$. אנחנו לא רואים מיידית זהות טריגונומטרית שיכולה לעזור, אז נציב ערכים. המשוואה צריכה להתקיים לכל x ולכן:
$x = 0$: $\lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 1 + \lambda_3 \cdot 0 = 0$ ולכן בהכרח $\lambda_2 = 0$.
$x = \pi$: $\lambda_1 \cdot 0 + \lambda_3 \pi^2 = 0$ ולכן בהכרח $\lambda_3 = 0$.
$x = \pi/2$: $\lambda_1 \cdot 1 = 0$ ולכן בהכרח $\lambda_1 = 0$. קיבלנו שכל הסקלרים בהכרח אפסים ולכן הפונקציות בלתי תלויות לינארית.
2. נשתמש בזהות $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ ולכן $f(x) = 5h(x) + 5g(x)$ כלומר הפונקציות תלויות לינארית.

משפט (8.1.2). *אם K מכילה לפחות 2 וקטורים היא ת"ל אמ"ם אחד הוקטורים לפחות הוא צ"ל של האחרים. לא בהכרח שכל וקטור הוא צ"ל של האחרים!*

ניסוח אחר של המשפט המופיע בשאלה 8.1.8: עבור K בת"ל מתקיים:

$$v \notin sp(K) \Longleftrightarrow K \cup \{v\} \text{ linearly dependent}$$

8.1.2 בסיסים

הגדרה (8.2.1). $B \subseteq V$ היא בסיס של V אם"ם:

1. $V = sp(B)$
2. B בת"ל

הערה. למרחב הלינארי $\{0\}$ אין בסיס.

דוגמה. :

- $\{1, x, ..., x^{n-1}\}$ בסיס של $F_n[x]$.
- $\{1, x, ...\}$ בסיס של $F[x]$.
- $\{E^{(1,1)}, E^{(1,2)}, ..., E^{(m,n)}\}$ בסיס של $M_{m\times n}(F)$.
- $\{(1,2), (3,4)\}$ בסיס של $\mathbb{R}^2$.
- $\mathbb{R}$ מעל $\mathbb{Q}$. לא רק שזהו לא מרחב נוצר סופית, אין לו בסיס בן מניה.

הגדרה (7.5.3). מ"ל V נוצר סופית אם הוא נפרש על ידי קבוצה סופית (ואז גם יש לו בסיס סופי).

שאלה: "מי מהקבוצות לעיל לא נוצרה סופית?"

תשובה: $F[x]$.

***משפט** (3.2.8). קבוצה $B \neq \{0\}$ בסיס של V אם"ם פורשת מינימלית אם"ם בת"ל מקסימלית.*

תוצאה חשובה של בסיסים - כל וקטור במרחב הלינארי ניתן להצגה כצ"ל באופן יחיד (מקדמים יחידים!) של איברי הבסיס (משפט 8.2.5)

8.1.3 ממד

***משפט** (2.3.8). נניח של-V קיים בסיס עם n איברים. אז:*

1. כל קבוצה עם יותר מ-n איברים תלויה לינארית.
2. כל קבוצה עם פחות מ-n איברים לא פורשת את V.

3. בכל בסיס של V יש בדיוק n וקטורים.
4. קבוצה בת"ל עם n וקטורים היא בסיס.
5. קבוצה פורשת עם n וקטורים היא בסיס.

מהמשפט רואים שלמספר הזה n יש חשיבות רבה ומגדירים

הגדרה (8.3.3). עבור מרחב נוצר סופית, $\dim V$ מוגדר להיות מספר האיברים בכל בסיס של V.

- $\dim F^n = n$
- $\dim(M_{m\times n}(F)) = mn$
- $\dim F_n[x] = n$ וזו הסיבה לסימון $F_n[x]$.
- $\dim\{0\} = 0$
- $\dim \mathbb{C}^n = n$ מעל $\mathbb{C}$.
- $\dim \mathbb{C}^n = 2n$ מעל $\mathbb{R}$. לכן מימד תלוי גם בשדה שמעליו עובדים!

משפט (4.3.8). *אם $W \subseteq V$ תת מרחבים אז*

- $\dim W \leq \dim V$.
- אם $\dim W = \dim V$ אז $W = V$.

המשפט הזה מאוד שימושי כדי להוכיח ששני מרחבים שווים. במקום להוכיח הכלה דו צדדית כמו בקבוצות, מספיק הכלה חד צדדית (בהרבה פעמים, אחד מכיווני ההכלה הוא טריוויאלי) ושוויון ממדים. באופן כללי, נראה שהרבה הוכחות אפשר לפשט באמצעות שיקולי משפטים.

תרגיל 8.3. נגדיר $W = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] | p(1) = 0\}$. הוכח כי $B = \{x-1, (x-1)^2\}$ בסיס של W.

פתרון: אפשר לחשב את האיבר הכללי, קבוצה פורשת ולהוכיח שהיא בסיס, אבל אפשר למצוא את הממד בצורה יותר פשוטה:

בבירור, $W \subseteq \mathbb{R}_3[x]$ לכן $\dim W \leq 3$. אבל $p(x) = 3 \notin W$ לכן $\dim W \leq 2$.

מצד שני, קל לראות כי $x-1, (x-1)^2 \in W$ והם לא פרופורציוניים לכן בת"ל לכן $\dim W \geq 2$ ולסיכום $\dim W = 2$.

הקבוצה B בת"ל בת שני איברים במרחב מסדר 2 ולכן היא בסיס.

תרגיל 8.4. יהיו $A = \{u_1, u_2, u_3\}$, $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ קבוצות וקטורים במ"ל V כך ש- A בת"ל ונגדיר $C = \{u_1 - 2u_2 + u_3, 2u_1 + 5u_2 + u_3, 4u_1 - 3u_2 + 7u_3\}$.
הוכח: אם $C \subseteq sp(B)$ אז $sp(A) = sp(B)$.

פתרון: סקיצה של הפתרון:

1. $sp(A)$ ולכן $C \subseteq sp(A)$. $sp(C) \subseteq sp(A)$.
2. בודקים ש-C בת"ל:

$$\lambda_1(u_1 - 2u_2 + u_3) + \lambda_2(2u_1 + 5u_2 + u_3) + \lambda_3(4u_1 - 3u_2 + 7u_3) = 0$$

ולכן

$$(\lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3)u_1 + (-2\lambda_1 + 5\lambda_2 - 3\lambda_3)u_2 + (\lambda_1 + \lambda_2 + 7\lambda_3)u_3 = 0$$

ומחוסר התלות מקבלים מערכת משוואות, פותרים ומקבלים שהקבוצה אכן בת"ל. לכן $\dim sp(C) = 3$.

3. מצד שני גם $\dim sp(A) = 3$ ולכן $sp(A) = sp(C)$.
4. לפי הנתון $C \subseteq sp(B)$ ולכן $sp(C) \subseteq sp(B)$.
5. כמו כן, $\dim sp(B) \leq 3$ ולפי ההכלה הקודמת $3 = \dim sp(C) \leq \dim sp(B)$ ולכן $\dim sp(C) = 3$.
6. משוויון הממדים נקבל $sp(C) = sp(B)$ לכן $sp(A) = sp(B)$.

תרגיל 8.5. הוכח כי $\mathbb{C} = sp\{2+3i, -2i\}$ מעל $\mathbb{R}$ רק במוגברת

פתרון: בבירור שני הוקטורים לא פרופורציוניים ולכן הקבוצה היא בת שני איברים במרחב ממד 2 מעל $\mathbb{R}$ לכן פורשת.

הערה. לא נכון לרשום $\dim B = 2$ אלא $\dim spB = 2$.

הגדרה. תהי $A \in M_{m\times n}(F)$. נגדיר את המרחב הנפרש על ידי שורות המטריצה ב- W_A^R ואת המרחב הנפרש על ידי העמודות ב-W_A^C.

אם שתי מטריצות שקולות שורות אז מרחבי השורות שווים.

תרגיל 8.6. הוכח או הפרך: אם A שקולת שורות ל-B אז מרחבי העמודות שווים.

פתרון: הטענה לא נכונה. למשל $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ו-$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. המטריצות שקולות שורות אבל מרחבי העמודות שלהן שונים.

השורות שאינן שורות אפסים במטריצה מדורגת הן בת"ל ולכן בסיס של מרחב השורות. לכן כדי למצוא בסיס וממד של מרחב השורות, צריך לדרג מטריצה.

תרגיל 8.7. מצא בסיס ומימד של $W = sp\{(1,-2,3,4),(1,3,-3,-5),(2,1,0,-1),(0,0,-2,0)\}$.

פתרון: מתקיים $W = W_A^R$ כאשר $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. נדרג ונקבל $A \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -6 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
ולכן $\dim W = 3$ והבסיס הוא $\{(1,-2,3,4),(0,5,-6-9),e_3\}$.
אפשר להשלים את הבסיס הזה לבסיס של $\mathbb{R}^4$ כולו על ידי הוספת עוד שורה למטריצה שתשמור עליה מדורגת. למשל - e_4.

***משפט (6.3.8).** עבור V נוצר סופית, $U, W \subseteq V$ מתקיים*

$$\dim(U+W) = \dim W + \dim U - \dim(U \cap W)$$

ולכן

$$\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W$$

תרגיל 8.8. מצא בסיס ל $W = \left\{(x,y,z,t,u) \middle| \begin{cases} x-2y+t-u & =0 \\ 2x-4y+z+u & =0 \end{cases} \right\}$ ומצא U כך ש- $\mathbb{R}^5 = W \oplus U$.

פתרון: נמצא את מרחב הפתרונות:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

לכן כל איבר הוא מהצורה $(2y-t+u, y, 2t-3u, t, u) = y(2,1,0,0,0) + t(-1,0,2,1,0) + u(1,0,-3,0,1)$ ולכן $W = sp(\{(2,1,0,0,0),(-1,0,2,1,0),(1,0,-3,0,1)\}$ ומתקיים $\dim W = 3$.
נשלים לבסיס. אנחנו צריכים עוד שני וקטורים כי הממד הוא 3. נציב במטריצה את השורות ונעשה פעולות אלמנטריות:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_1]{R_2 \to R_2 + R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

קיבלנו מטריצה מדורגת וכדי שהיא תישאר מדורגת אפשר להוסיף, למשל, את e_4, e_5. לכן $U = sp\{e_4, e_5\}$.

תרגיל 8.9. מתקיים $\dim U = \dim W = 2$ עבור $U, W \subseteq \mathbb{R}^3$. הוכח כי $U \cap W \neq \{0\}$.

פתרון: מתקיים $U, W \subseteq \mathbb{R}^3$ ולכן גם $U + W \subseteq \mathbb{R}^3$ ומתקיים $\dim(U + W) \leq 3$. לכן

$$\dim U \cap W = \dim W + \dim U - \dim(U + W) = 4 - \dim(U + W) \geq 1$$

ולכן $U \cap W \neq \{0\}$.

שאלה: "מה המשמעות הגאומטרית של התרגיל?"

תשובה: שני מישורים במרחב (שעוברים דרך הראשית) נחתכים לפחות בקו ישר.

תרגיל 8.10. האם $M_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & b-a \\ 0 & a \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R} \right\} \oplus \left\{ \begin{pmatrix} c & d-c \\ d & 2c-d \end{pmatrix} | c, d \in \mathbb{R} \right\} = U \oplus W$?

פתרון: כדי לבדוק זאת צריך לבדוק שני תנאים: האם החיתוך או ריק והאם הסכום הוא $M_2(\mathbb{R})$. בעזרת שיקולי ממדים אפשר לוותר על אחת הבדיקות.

יהי $X \in U \cap W$: לכן קיימים $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ כך ש:

$$\begin{pmatrix} a+b & b-a \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d-c \\ d & 2c-d \end{pmatrix}$$

מקבלים מערכת של 4 משוואות הומוגניות ב-4 נעלמים, פותרים ומקבלים פתרון יחיד. לכן $X = 0$ בהכרח ולכן $U \cap W = \{0\}$.

כמו כן, קל לראות $\dim U = \dim W = 2$ ולכן $\dim(U + W) = 2 + 2 - 0 = 4 = \dim M_2(\mathbb{R})$. לכן $M_2(\mathbb{R}) = U \oplus W$.

תרגיל 8.11. נגדיר:

$$\begin{aligned} U &= sp\{(1,3,-2,2,3),(1,4,-3,4,2),(2,3,-1,-2,9)\} \\ W &= sp\{(1,3,0,2,1),(1,5,-6,6,3),(2,5,3,2,1)\} \end{aligned}$$

1. מצא בסיס וממד ל-$U, W, U+W$.
2. מצא בסיס וממד עבור $U \cap W$.

פתרון: נפתור על ידי שימוש במרחבי שורות של מטריצות.

$$\begin{aligned} U &= \ldots = sp\{(1,4,-3,4,2),(0,1,-1,2,-1)\} \to \dim U = 2 \\ W &= \ldots = sp\{(1,3,0,2,1),(0,1,-3,2,1)\} \to \dim W = 2 \end{aligned}$$

באותו אופן

$$\begin{aligned} U+W &= sp\{(1,4,-3,4,2),(0,1,-1,2,-1),(1,3,0,2,1),(0,1,-3,2,1)\} \\ \ldots &= sp\{(1,4,-3,4,2),(0,1,-1,2,-1),(0,0,1,0,-1)\} \end{aligned}$$

ולכן $\dim U+W = 3$ וכן $\dim(U \cap W) = 2+2-3 = 1$.

לפיכך כדי למצוא בסיס לחיתוך מספיק למצוא וקטור אחד שונה מאפס בחיתוך.

אפשרות אחת: לנחש.

אפשרות שניה: מחפשים $X \in U \cap W$ ולכן $X = au_1 + bu_2 = cw_1 + dw_2$. מקבלים 5 משוואות ב-4 נעלמים, פותרים ומקבלים

$$U \cap W = sp\{(1,4,-3,4,2)\}$$

8.2 קואורדינטות

הגדרה. יהי V מ"ל, $B = (b_1, ..., b_n)$ בסיס סדור. לכל $v \in V$ קיימים $\beta_1, ..., \beta_n \in F$ (יחידים) כך ש-$v = \beta_1 b_1 + ... + \beta_n b_n$. מגדירים את וקטור הקואורדינטות של v לפי הבסיס B על ידי:

$$[v]_B = (\beta_1, ..., \beta_n)^t \in F^n$$

דוגמה. :

1. $v = (1,2), E = (e_1, e_2)$. לכן $[v]_E = (1,2)^t$.
2. הפעם $E' = (e_2, e_1)$ ואז $[v]_{E'} = (2,1)^t$.
3. הפעם $B = ((1,1),(1,0))$. קל לראות ש-$(1,2) = 2(1,1) - 1(1,0)$ ולכן $[v]_B = (2,-1)^t$.
4. $E = (1, x, x^2)$ ואז $[x^2 - 5x + 3]_E = (3, -5, 1)^t$.

תכונות של העתקת הקואורדינטות:

1. חד חד ערכית (לוקטורים שונים מתאימים וקטורי קואורדינטות שונים).
2. על (כל וקטור קואורדינטות מתאים לוקטור ב-V).
3. לינארית:

   א) $[v+u]_B = [v]_B + [u]_B$

   ב) $[\lambda v]_B = \lambda [v]_B$

התכונות הללו מאפשרות לנו להעביר בעיות מהמרחב המקורי למרחב של n-יות. למשל: וקטורים ת"ל אם"ם וקטורי הקואורדינטות המתאימים תלויים לינארית (משפט 8.4.4).

תרגיל 8.12. מצא בסיס ל-

$$W = sp\{p_1(x) = 2x^3 + x^2 - 7x - 7, p_2(x) = x^3 + 2x^2 - 2x + 1, p_3(x) = x^3 + 3x^2 - x + 4\}$$

פתרון: נשתמש בבסיס הסדור $E = (x^3, x^2, x, 1)$ של $\mathbb{R}_4[x]$. וקטורי הקאורדינטות לפי בסיס זה הם

$$\{[p_1(x)]_E, [p_2(x)]_E, [p_3(x)]_E\} = \{(2,1,-7,-7)^t, (1,2,-2,1)^t, (1,3,-1,4)^t\}$$

מכניסים למטריצה כשורות, מדרגים ומקבלים שני וקטורים בת"ל: $(1,2,-2,1),(0,1,1,3)$. הפולינומים שאלו וקטורי הקואורדינטות שלהם בת"ל, כלומר $B=\{x^3+2x^2-2x+1,x^2+x+3\}$ בסיס של W ו-$\dim W=2$.

השיטה הכללית:

1. מעבירים את הבעיה באמצעות וקטור קואורדינטות ל-F^n.
2. פותרים ב-F^n (כמו פרק 2 ותחילת הפרק הנוכחי).
3. מחזירים את הפתרון למרחב המקורי.

תרגיל 8.13. מצא בסיס ל-$W=sp\left\{\begin{pmatrix}1&-7\\-5&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&-5\\-4&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\-1&5\end{pmatrix}\right\}$. רק במוגברת

פתרון: נשתמש בוקטורי קואורדינטות לפי $E=(E^{(1,1)},E^{(1,2)},E^{(2,1)},E^{(2,2)})$. נקבל את וקטורי השורות:

$$\begin{pmatrix}1&-7&-5&-1\\1&-5&-4&2\\1&1&-1&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-7&-5&-1\\0&2&1&3\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

כלומר וקטורי הקואורדינטות הם בת"ל ולכן גם הוקטורים המקוריים בת"ל.

8.2.1 מטריצת מעבר

נסתכל על שני בסיסים סדורים $B=(u_1,...,u_n)$ ("הבסיס הישן") ו-$B'=(v_1,...,v_n)$ ("הבסיס החדש").
ידוע לנו $[w]_B$ ורוצים לחשב את $[w]_{B'}$.
מגדירים את מטריצת המעבר בין הבסיסים על ידי (מטריצת המעבר מבסיס B לבסיס B'):

$$M=([v_1]_B|[v_2]_B|...|[v_n]_B)$$

מתקיים $[w]_B=M[w]_{B'}$ ואם רוצים הפוך אז $[w]_{B'}=M^{-1}[w]_B$ כי מטריצת המעבר תמיד הפיכה.

דוגמה. נסתכל על $\mathbb{R}^2$ עם $B=E$ ו-$B'=((2,1),(1,-1))$, $w=(x,y)$. נחשב את מטריצת המעבר ונמצא את $[w]_{B'}$.

באופן טריוויאלי (בסיס סטנדרטי) נקבל $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. בשיטה הרגילה מוצאים מטריצה הופכית ומקבלים $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$ ולכן

$$[w]_{B'} = M^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x+y}{3} \\ \frac{x-2y}{3} \end{pmatrix}$$

וקיבלנו את וקטור הקואורדינטות לפי הבסיס החדש.

בפרקים הבאים נראה עוד שימושים למטריצת המעבר.

תרגיל 8.14. יהיו $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ וקטורים בת"ל ב-V.

1. הוכח כי $B_0 = \{u_1 + u_2, u_2 - u_3, u_1 + u_2 + u_3\}$ בסיס ל-$W = sp(B)$.
2. מהי מטריצת המעבר מ-B_0 ל-B?

פתרון: נשתמש בבסיס B ונרשום את וקטורי הקואורדינטות של B_0:

$$[u_1 + u_2]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, [u_2 - u_3]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, [u_1 + u_2 + u_3]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

כדי להוכיח שזהו בסיס מספיק לבדוק שהם בת"ל (למה?) ונעשה זאת על ידי רישומם במטריצה ובדיקת הפיכותה:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \det M = 2 + (-1) = 1 \neq 0$$

ולכן המטריצה הפיכה והוקטורים בת"ל ולכן בסיס.

שאלה: האם יש בעיה עם זה שלא נתון ש-V נוצר סופית?

תשובה: לא, כי מסתכלים על הוקטורים הללו כוקטורים במ"ל נוצר סופית, $sp\,(B)$.

המטריצה שמצאנו היא בדיוק מטריצת המעבר מבסיס B לבסיס B_0 ולכן אם מחפשים את המטריצה ההפוכה צריך להפוך אותה:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

נדבר על שימושים נוספים של מטריצת המעבר בין בסיסים בפרק 10.

8.3 דרגה של מטריצה

הגדרה (8.5.4). עבור מטריצה $A \in M_{m\times n}(F)$ הגדרנו מרחב שורות ומרחב עמודות. משפט 8.5.2 אומר שהממדים של המרחבים הללו שווים תמיד. מספר זה מוגדר "הדרגה של המטריצה" ומתקיים

$$\rho(A) = \dim W_A^R = \dim W_A^C$$

הערה. בד"כ המרחבים עצמם שונים $W_A^R \neq W_A^C$ אבל הדרגה שווה!

דוגמה. הדרגה של המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 8 & -12 \\ -2 & -4 & 6 \end{pmatrix}$ היא 1 כי כל השורות הן כפולה של הראשונה (אחרי דירוג נישאר עם שורה אחת שאינה שורת אפסים).

תכונות (מסוכם בשאלות 8.5.4-8.5.8):

1. $\rho(A) = \rho(A^t)$
2. $\rho(A) \leq \min(m,n)$
3. $\rho(AB) \leq \min(\rho(A), \rho(B))$
4. אם B הפיכה אז $\rho(AB) = \rho(A)$
5. $\rho(A) = n$ אם"ם A הפיכה. זהו מאפיין נוסף חשוב של מטריצה הפיכה (בנוסף למשפט 3.10.6 ואי התאפסות הדטרמיננטה).

תרגיל 8.15. יהיו $A \in M_{m\times n}(F), B \in M_{n\times m}(F)$ ונניח $n < m$. הוכח כי AB סינגולרית.

פתרון: מתקיים $\rho(AB) \leq \rho(A) \leq n < m$ אבל $AB \in M_{m\times m}(F)$ ולכן אינה הפיכה.

8.3.1 דרגה ומשוואות לינאריות

נגדיר $P(A)$ את מרחב הפתרונות של $A\underline{x} = 0$ כאשר $A \in M_{m\times n}(F)$. כבר ראינו שזה מרחב לינארי. מתקיים (משפט 8.6.1):

$$\dim(P(A)) + \rho(A) = n$$

אינטואיציה: יש n משתנים. אחרי דירוג יש $\dim P(A)$ משתנים חופשיים (כל אחד מוסיף 1 למימד של הפתרונות) ויש $\rho(A)$ משתנים קשורים (כל אחד מייצג שורה שלא התאפסה בדירוג). הסכום אם כך צריך להיות n.

לפעמים מסמנים $nul(A) = \dim P(A)$.

תרגיל 8.16. יהיו $A, B \in M_{5\times5}(\mathbb{R})$ מדרגה 3. הוכח כי $AB \neq 0$.

פתרון: נניח בשלילה כי $AB = 0$. לכן כל אחת מעמודות B הן פתרונות של מערכת המשוואות $Ax = 0$ (לפי למה 3.4.3, כפל מטריצות זה כמו כפל המטריצה השמאלית בכל שורה של הימנית) ולכן $W_B^C \subseteq P(A)$. לכן

$$3 = \rho(B) = \dim W_B^C \leq \dim P(A) = 5 - \rho(A) = 2$$

קיבלנו סתירה ולכן $AB \neq 0$.

תרגיל 8.17. הוכיחו שכל מטריצה מדרגה 2 היא סכום של שתי מטריצות מדרגה 1.

פתרון: יש שתי אפשרויות. דרך ראשונה היא להגיד שמרחב השורות נפרש על ידי 2 וקטורים בת"ל, לכן השורה ה-i במטריצה היא מהצורה $a_iv_1 + b_iv_2$. המטריצה שהשורות שלה הן a_iv_1 היא מדרגה 1 (למה?) וכך גם המטריצה ששורותיה b_iv_2. סכומן הוא המטריצה הנ"ל.

דרך שניה: אם A מדורגת אז יש בה שתי שורות שונות מאפס ואפשר לרשום את המטריצה כסכום של שתי מטריצות שבכל אחת יש רק את אחת מהשורות. אם A לא מדורגת, אפשר לדרג אותה על ידי כפל משמאל במטריצה הפיכה. כפל כזה שומר על הדרגה ואז הטיעון הקודם תקף.

לעבור על הממ"ן והממ"ח הקרובים ולדבר על השאלות שאפשר לפתור.

9 טרנספורמציות לינאריות

תזכורת (מופיע בפרקי הכנה!):

- פונקציה $T : V \to W$ היא התאמה של איברים ל-V ל-W כך שלכל איבר ב-V $v \in$ מותאם איבר אחד ב-W $T(v) \in$. V נקרא התחום של הפונקציה, W הטווח.
- פונקציה היא חד-חד ערכית (חח"ע) אם $y \neq x$ גורר $T(x) \neq T(y)$ (לחילופין אם $T(x) = T(y)$ גורר $x = y$). למשל $f(x) = x^3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ אבל לא $g(x) = x^2$.
- פונקציה היא על אם לכל איבר בטווח יש מקור. כלומר, לכל $y \in W$ קיים $x \in V$ כך ש $f(x) = y$. למשל $f(x) = x^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ אבל לא $g(x) = 3$.

מבין כל הפונקציות האפשריות בין שני מרחבים לינאריים V, W(מעל אותו שדה) נתמקד באלו השומרות על המבנה של המרחב הלינארי:

1. לכל $v_1, v_2 \in V$ מתקיים $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$.
2. לכל $v \in V, \lambda \in F$ מתקיים $T(\lambda v) = \lambda T(v)$.

כלומר הפונקציה שומרת על צ"ל: $u = \sum \lambda_i v_i$ גורר $T(u) = \sum \lambda_i T(v_i)$.

פונקציה שמקיימת שתי תכונות אלו נקראת העתקה (טרנספורמציה) לינארית (הגדרה 9.1.1).

לפעמים נרשום Tv במקום $T(v)$ מטעמי נוחות וגם יהיה בזה יותר היגיון בהמשך.

דוגמה. :

1. טרנספורמציית הזהות $I_d : V \to V$ כך ש-$I_d(v) = v$.
2. טרנספורמציית האפס: $T : V \to W$ כך ש- $T(v) = 0$ לכל v.
3. העתקת קוארדינטות: $T : V \to F^n$ המוגדרת $T(v) = [v]_B$ כאשר B בסיס של V.
4. $T : \mathbb{R}^2 \to M_3(\mathbb{R})$ המוגדרת על ידי $T(x, y) = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x+y & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$.

משפט (3.1.9). *$T : V \to W$ היא ט"ל אם"ם לכל $v, w \in V$, $\lambda, \delta \in F$ מתקיים* $T(\lambda v + \delta w) = \lambda T(v) + \delta T(w)$.

נשתמש במשפט כדי להוכיח שהטרנספורמציה הרביעית היא אכן ט"ל: רק במוגברת

$$\begin{aligned}
T(a(x,y)+b(z,w)) &= T(ax+bz,ay+bw) = \begin{pmatrix} ax+bz & 0 & 0 \\ 0 & ax+bz+ay+bw & 0 \\ 0 & 0 & ay+bw \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} ax & 0 & 0 \\ 0 & ax+ay & 0 \\ 0 & 0 & ay \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} bz & 0 & 0 \\ 0 & bz+bw & 0 \\ 0 & 0 & bw \end{pmatrix} \\
&= a\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x+y & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} z & 0 & 0 \\ 0 & z+w & 0 \\ 0 & 0 & w \end{pmatrix} \\
&= aT(x,y)+bT(z,w)
\end{aligned}$$

תכונה שימושית לפסול ט"ל: $T(0_v)=0_w$ כלומר ט"ל מעבירה 0 ל-0. אם פונקציה לא עושה זאת היא בוודאות לא ט"ל.

תרגיל 9.1. האם $T:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}$ היא ט"ל כאשר $T(z_1,z_2)=z_1+\overline{z_2}$

1. **מעל $\mathbb{C}$?**
2. **מעל $\mathbb{R}$?**

פתרון: נבדוק בנפרד כפל בסקלר וסכימה:

$$T((z_1,z_2)+(w_1,w_2)) = T(z_1+w_1,z_2+w_2) = z_1+w_1+\overline{z_2+w_2} = ... = T(z_1,z_2)+T(w_1,w_2)$$

עבור $\lambda=i\in\mathbb{C}$ תכונת הכפל לא מתקיימת:

$$T(i(1,1)) = T(i,i) = i+\overline{i} = 0 \neq iT(1,1) = 2i$$

עבור $\lambda\in\mathbb{R}$ כפל בסקלר מתקיים:

$$T(\lambda(z,w)) = T(\lambda z, \lambda w) = \lambda z + \overline{\lambda w} = \lambda(z+\overline{w}) = \lambda T(z,w)$$

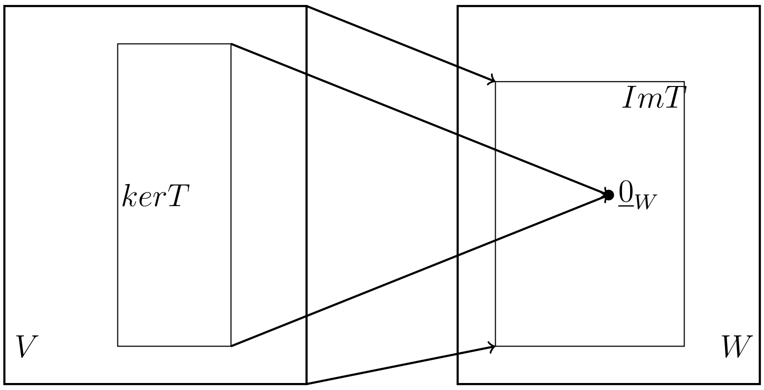
לסיכום: T ט"ל מעל $\mathbb{R}$ אבל לא מעל $\mathbb{C}$.

9.1 דמות וגרעין

הגדרה (9.3.3). הקבוצה $T(V) = \{T(v)|v \in V\} \subseteq W$ היא תת מרחב של W ונקראת הדמות של T.
סימון: ImT.

כדי למצוא את הדמות נשתמש בלמה 9.3.6: אם $V = sp\{v_1,...,v_n\}$(לאו דווקא בסיס) אז $ImT = sp\{T(v_1),...,T(v_n)\}$.

הגדרה. הקבוצה $kerT = \{v \in V|T(v) = 0\}$ נקראת הגרעין של T והיא תת מרחב של V.



דוגמה. תהי $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ונגדיר $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ על ידי $T(v) = Av$. נחשב את $kerT, ImT$:
לפי הלמה $ImT = sp\{T(e_1), T(e_2)\} = sp\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}\} = \mathbb{R}^2$.
כמו כן, $T(v) = 0$ אם"ם $Av = 0$. A הפיכה ולכן $Av = 0$ אם"ם $v = 0$. לכן $kerT = \{0\}$.

הדבר נכון באופן כללי גם (למה 9.3.7): אם $T: F^n \to F^m$ מוגדרת על ידי $T(v) = Av$ כאשר $A \in M_{m\times n}(F)$ אז $ImT = W_A^C$, $kerT = P(A)$.

במונחי דמות וגרעין קל לבדוק האם ט"ל היא חח"ע והאם היא על. ט"ל היא על אם"ם $ImT = W$ (ההגדרה).
כמו כן:

למה (9.5.2). *העתקה היא חח"ע אם"ם* $kerT = \{0\}$.

תרגיל 9.2. נגדיר $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ על ידי $T(x,y,z)=(x+2y,y-z,x+2z)$. רק במוגברת

1. הוכח כי זו ט"ל
2. מצא את הגרעין
3. מצא את הדמות
4. האם הט"ל חח"ע? האם על?

פתרון:

1. הוכחה סטנדרטית $T(\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2)=....$
2. $v\in kerT$ אם"ם $Tv=0$. מקבלים מערכת משוואות: $\begin{cases}x+2y&=0\\y-z&=0\\x+2z&=0\end{cases}$. פותרים ומקבלים פתרון כללי ו-$kerT=sp\{(-2,1,1)\}$.
3. לפי הלמה $ImT=sp\{Te_1,Te_2,Te_3\}=sp\{(1,0,1),(2,1,0),(0,-1,2)\}=sp\{(1,0,1),(2,1,0)\}$.
4. לא חח"ע כי הגרעין שונה ממרחב האפס. לא על כי התמונה ממימד 2 ואילו מרחב הטווח ממימד 3.

תרגיל 9.3. נגדיר $T:\mathbb{R}_3[x]\to M_2(\mathbb{R})$ על ידי $T(a+bx+cx^2)=\begin{pmatrix}a+b&0\\b+c&c-a\end{pmatrix}$.

1. מצאו בסיס ומימד של הגרעין.
2. מצאו בסיס ומימד של התמונה.
3. האם הט"ל חח"ע? האם היא על?

פתרון:

1. מקבלים מערכת משוואות והפתרון הכללי הוא $\{(t,-t,t)|t\in\mathbb{R}\}$ ולכן $kerT=sp\{1-x+x^2\}$ (חשוב לחזור למרחב המקורי, פולינומים!) והמימד הוא 1.
2. $ImT=sp\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}\right\}=sp\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}\right\}$ והמימד הוא 2.
3. הט"ל לא חח"ע כי הגרעין אינו מרחב האפס והיא לא על כי מרחב הדמות שונה ממרחב הטווח (לחילופין, כי המטריצה $E^{(1,2)}$ לא בדמות).

***משפט* (9.6.1).** *עבור* $T:V\to W$ *כאשר* V *נוצר סופית מתקיים*

$$\dim ImT+\dim kerT=\dim V$$

משפט המימד נותן את הקשר בין שני המרחבים הלינאריים הקשורים לט"ל ושימושי כאשר למשל רוצים להראות שוויון מרחבים (בעזרת שוויון מימדים והכלה) או לדעת מראש שט"ל מסוימת אינה על.

תרגיל 9.4. תהי $T : V \to V$ ט"ל. נניח כי $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ בסיס ל-V כאשר $\{v_1, v_2\}$ בסיס של $kerT$. הוכח: Tv_3, Tv_4 בת"ל.

פתרון: ראינו כי $ImT = sp\{Tv_1, Tv_2, Tv_3, Tv_4\} = sp\{Tv_3, Tv_3\}$ ולכן שני הוקטורים פורשים את הדמות. מצד שני, לפי משפט המימדים $\dim ImT = 4 - 2 = 2$ ולכן שני הוקטורים מהווים בסיס לדמות וככאלה הם בלתי תלויים.

9.2 קביעת טרנספורמציה לינארית

כדי לקבוע ערך של פונקציה בכל נקודה בתחום הגדרתה, צריך להגדיר את כלל ההתאמה של הפונקציה בכל נקודה. במקרה של ט"ל מספיק לעשות זאת על בסיס:

משפט (2.4.1+9.4.9). אם B בסיס של V אז $T : V \to W$ מוגדרת באופן אחד ויחיד על ידי ערכיה ב-B.

למשל, אם $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ מקיימת $T(1,0) = (1,0,0)$ ו- $T(0,1) = (0,2,1)$ אז מתכונות הט"ל נקבל מיידית את כלל ההתאמה לכל נקודה: $T(x,y) = (x, 2y, y)$. לכן הרבה פעמים במקום לחפש מפורשות כלל התאמה נגדיר את הט"ל רק על בסיס.

תרגיל 9.5. מצא $T : \mathbb{R}_4[x] \to M_{2\times3}(\mathbb{R})$ המקיימת:

- הגרעין נפרש על ידי $p(x) = x^3 - 2x + 1, q(x) = x^3 + x^2 - x + 3$.
- התמונה מכילה את המרחב $sp\left\{\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$.

פתרון: נשלים לב ש-$p(x), q(x)$ בת"ל ונשלים אותם לבסיס (בממ"ן/מבחן - הסטודנטים צריכים להוכיח שזה בסיס...): $\{p(x), q(x), x, 1\}$. נגדיר את T על איברי הבסיס ובכך היא תוגדר בכל מקום.

בהתאם לדרישה הראשונה, $T(p(x)) = T(q(x)) = O_{2\times3}$.

כמו כן, כדי שהתמונה תכיל את המרחב הדרוש צריך שהוקטור הפורש את המרחב גם יתקבל ולכן למשל $T(x) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

עמדנו בכל הדרישות אבל עוד לא הגדרנו את כל הט"ל. נשאר להגדיר את $T(1)$.

שאלה: האם ניתן להגדיר את $T(1)$ כרצוננו או שיש הגבלות?

תשובה: יש הגבלות. למשל, $T(1)\neq 0$ כי אחרת $1\in kerT$ בסתירה. כמו כן, ממשפט המימדים נקבל $\dim ImT=4-\dim kerT=2$ כלומר התמונה צריכה להיפרש על ידי שני וקטורים בת"ל ולכן $T(1)$צריך להיות וקטור שונה מאפס שאינו נמצא במרחב הנפרש על ידי $\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 3 & -1 & 0\end{pmatrix}$. למשל אפשר להגדיר $T(1)=E^{(1,1)}$.

בכך הוגדרה הט"ל ונשאר להוכיח שהיא אכן עומדת בדרישות.

שאלה: האם לתרגיל פתרון יחיד?

תשובה: לא. יש הרבה ט"ל שמקיימות את הדרישות. למשל אפשר לבחור את $T(1)$ להיות הרבה דברים אחרים או אפשר להשלים לבסיס בדרך שונה ולקבל ט"ל שונה.

תרגיל 9.6. האם קיימת ט"ל $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ שונה מט"ל האפס כך ש $T(1,0,1)=T(1,2,1)=T(0,1,1)=T(2,3,3)$. אם כן - מהי. אם לא - למה לא?

פתרון: שאלה: למה שבכלל תהיה בעיה בלהגדיר ט"ל כזו?

תשובה: מדובר על ט"ל ממרחב מימד 3, לכן מספיק להגדיר אותה ב-3 מקומות (בסיס). אבל כאן היא מוגדרת ב-4 מקומות ולכן יש הגדרה מיותרת שיכולה לסתור את ההגדרה על הבסיס.

למשל - קל לראות ש $(2,3,3)=(1,0,1)+(1,2,1)+(0,1,1)$. אם נניח שקיימת כזו ט"ל וכל התמונות שוות לוקטור v אז מתקיים $v=T(2,3,3)=T(1,0,1)+T(1,2,1)+T(0,1,1)=3v$ ולכן $2v=0$ כלומר $v=0$. אבל שלושת הוקטורים $(1,0,1),(1,2,1),(0,1,1)$ הם בת"ל ולכן בסיס של $\mathbb{R}^3$ ולכן הט"ל נותנת אפס לכל איבר בבסיס ולכן לכל איבר במרחב ולכן בהכרח $T=0$. לסיכום - לא קיימת ט"ל שונה מאפס כזו.

תרגיל 9.7. תהי $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ המוגדרת (חלקית) על ידי $T(1,3,-1,0)=(1,0,-4);T(2,1,2,1)=(2,0,8)$. האם T יכולה להיות חח"ע? האם היא יכולה להיות על? אם כן - הראו דוגמא שכן ודוגמא שלא. אם לא - למה לא?

פתרון: משיקולי מימדים, הט"ל לא יכולה להיות חח"ע. אנחנו יודעים ש $ImT\subseteq\mathbb{R}^3$ ולכן $\dim ImT\leq 3$ כלומר $\dim kerT\geq 4-3=1$. לכן $kerT\neq\{0\}$ והט"ל לא חח"ע.

הט"ל יכולה להיות על ויכולה להיות לא על, תלוי באופן בו היא מוגדרת. נשים לב כי לפי ההגדרה עד כה, $\dim ImT\geq 2$ כי שני הוקטורים בת"ל. אם נרחיב את ההגדרה על ידי השלמה לבסיס של $\mathbb{R}^4$ אפשר פעם אחת לקבל ט"ל על (למשל $T(0,0,0,1)=(0,1,0),T(0,0,1,0)=(0,0,0)$) ופעם אחרת לא על (למשל $T(0,0,0,1)=T(0,0,1,0)=(0,0,0)$).

9.3 פעולות על ט"ל

תהיינה $T,S:V\to W$ מעל F. ניתן להגדיר ט"ל חדשות:

- טרנספורמציית הסכום $T+S:V\to W$ המוגדרת על ידי $(T+S)(v)=T(v)+S(v)$.
- טרנספורמציית הכפל בסקלר $\lambda\in F$: $\lambda T:V\to W$ המוגדרת על ידי $(\lambda T)(v)=\lambda T(v)$.

מסמנים את קבוצת כל הט"ל מV ל W על ידי $Hom(V,W)$. ביחד עם הפעולות שהוגדרו לעיל, סכום ט"ל וכפל ט"ל בסקלר, הקבוצה $Hom(V,W)$ היא מרחב לינארי בעצמה מעל F!

9.3.1 כפל/הרכבה של ט"ל

אם $T:V\to W; S:W\to U$ שתי ט"ל מעל אותו שדה, אפשר להגדיר את ההרכבה של Sעל T באופן הבא: $ST:V\to U$ מוגדרת על ידי $ST(v)=S(T(v))$. (לשרטט את פעולת ההרכבה)

תרגיל 9.8. תהי $T:V\to V$. הוכח כי $kerT^2\subseteq kerT$ אם"ם $ImT\cap kerT=\{0\}$

פתרון:

- כיוון ראשון, נניח $kerT^2\subseteq kerT$:

יהי $v\in kerT\cap ImT$ ונוכיח $v=0$. ראשית, $v\in ImT$ לכן קיים $w\in V$ כך ש-$T(w)=v$. מצד שני, $v\in kerT$ לכן $Tv=0$ כלומר $T^2(w)=T(v)=0$. לכן $w\in kerT^2$. מהנתון נקבל $w\in kerT$ולכן $T(w)=0=v$. כנדרש.

- כיוון שני, נניח $ImT\cap kerT=\{0\}$

יהי $v\in kerT^2$. לכן $T^2(v)=T(T(v))=0$ ולכן $T(v)\in kerT$. מצד שני, בבירור $T(v)\in ImT$ ולכן $T(v)\in kerT\cap ImT$ כלומר $T(v)=0$. לכן $v\in kerT$ ולכן $kerT^2\subseteq kerT$.

הערה. שתי שיטות ההוכחה שנקטנו בהן הן סטנדרטיות מאוד בתורת הקבוצות. כדי להוכיח שקבוצה אחת חלקית לשניה לוקחים איבר בראשונה ומראים שהוא גם בשניה. כדי להראות שחיתוך הוא ריק (או, עבור מ"ל, מרחב האפס) לוקחים איבר בחיתוך ומוכיחים שהוא מקיים תכונות סותרות/איבר האפס.

תרגיל 9.9. תהי $T:V\to V$ כך ש $T^2=2T$ ו-V נוצר סופית. הוכח כי $kerT\cap ImT=\{0\}$וכן $V=ImT\oplus kerT$.

פתרון: יהי $v\in kerT\cap ImT$. לכן קיים $w\in V$ כך ש-$T(w)=v$ ומתקיים $T^2(w)=T(v)=0$. מצד שני, $T^2(w)=2T(w)=2v$. לכן $2v=0$ ולכן $v=0$. לכן $kerT\cap ImT=\{0\}$.

מתקיים $ImT,kerT\subseteq V$ ולכן $ImT+kerT\subseteq V$. משיקולי מימדים, $\dim(ImT+kerT)=\dim ImT+\dim kerT-\dim kerT\cap ImT=\dim ImT+\dim kerT=\dim V$. לכן $V=kerT+ImT$ ומאחר והחיתוך ביניהם הוא מרחב האפס, נקבל $V=kerT\oplus ImT$.

הערה. תמיד מתקיים $\dim ImT+\dim kerT=\dim V$ אבל לא תמיד זהו סכום ישר. ראשית, לא תמיד הם תתי מרחבים של אותו המרחב. שנית, לא תמיד החיתוך הוא אפס. יחד עם זאת, בזכות משפט המימדים ההוכחה יחסית פשוטה, אחרת צריך להשתמש בהוכחה אלגברית ולהראות שכל $v\in V$ ניתן לרשום כסכום של איבר מהגרעין ואיבר מהתמונה.

תרגיל 9.10. תהי $T:V\to V$ כאשר המרחב נוצר סופית. הוכח כי אם $kerT=kerT^2$ אז $ImT=ImT^2$.

פתרון: ראשית נשים לב כי באופן טריוויאלי, $ImT^2\subseteq ImT$. נשתמש בשיקולי מימדים כדי להראות שהמרחבים שווים (יותר פשוט מההכלה השניה).

מתקיימות שתי משוואות: $\dim ImT+\dim kerT=\dim V$ וגם $\dim ImT^2+\dim kerT^2=\dim V$.
מאחר ו-$kerT=kerT^2$ גם מימדיהם שווים ואנחנו מקבלים $\dim ImT=\dim ImT^2$. לכן גם המרחבים שווים.

תרגיל 9.11. תהי $A=\{v_1,...,v_k\}\subseteq V$ כאשר V ממימד סופי, $T:V\to V$. הוכח כי אם A לא פורשת את V אז קיימת $S:V\to V$ כך ש-$Tv_i=Sv_i$ לכל $v_i\in A$ אבל $S\neq T$.

פתרון: נסתכל על $B'\subseteq A$ בסיס של $sp(A)$ ונשלים אותו לבסיס של V על ידי $C\neq\emptyset$, כלומר $B\cup C$ בסיס של V. נגדיר ט"ל $S:V\to V$ על איברי $B\cup C$ באופן הבא:

$$S(v)=\begin{cases}T(v) & v\in B\\ T(v)+v & v\in C\end{cases}$$

הט"ל T,S מזדהות על איברי הבסיס של $sp(A)$ לכן זהות על כל המרחב $sp(A)$ ובפרט על כל איברי A. מצד שני, עבור $v\in C$ מתקיים $S(v)=T(v)+v\neq T(v)$ כי $v\neq 0$ כי v חלק מבסיס. כמובן שניתן להגדיר את S בדרכים אחרות.

הגדרה. אם $T:V\to W$ חח"ע ועל אז אומרים שהיא הפיכה, כלומר קיימת $T^{-1}:W\to V$ כך ש $T^{-1}T(v)=v$ לכל $v\in V$.

אם קיימת $T:V\to W$ ט"ל חח"ע ועל אז המרחבים V,W נקראים איזומורפיים ו-T נקראת איזומורפיזם.

למשל $T(x,y,z,w)=\begin{pmatrix}x & y\\ z & w\end{pmatrix}$ היא חח"ע ועל ולכן $\mathbb{R}^4$ ו-$M_2(\mathbb{R})$ איזומורפיים ונראים אותו דבר כמרחב לינארי (אותו מימד ואותה "צורה"). דרך המחשה אפשרית: שני ריבועים, אחד ישר ואחד מסובב.

תרגיל 9.12. תהי $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ המוגדרת על ידי $T(v)=Av$ כאשר $A=\begin{pmatrix}1 & \alpha & ... & \alpha\\ \alpha & 1 & ... & \alpha\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \alpha & \alpha & ... & 1\end{pmatrix}$.

1. עבור אילו ערכי α הט"ל היא איזומורפיזם בין המרחבים?
2. עבור $\alpha=1$, מצא את הבסיסים של הגרעין והדמות וקבע האם $\mathbb{R}^n=ImT\oplus kerT$.

פתרון:

1. זוהי ט"ל בין מרחבים מאותו מימד ולכן T איזומורפיזם אם"ם T חח"ע (משפט 9.6.2) וזה קורה אם"ם למשוואה $Av=0$ יש רק פתרון אחד, הטריוויאלי. כלומר אם"ם A הפיכה. נבדוק זאת על ידי חישוב דטרמיננטה:

$$\begin{aligned}|A| &= \begin{vmatrix} 1 & \alpha & ... & \alpha \\ \alpha & 1 & ... & \alpha \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha & \alpha & ... & 1 \end{vmatrix} \underset{=}{C_1 \to C_1 + ... + C_n} \begin{vmatrix} (n-1)\alpha+1 & \alpha & ... & \alpha \\ (n-1)\alpha+1 & 1 & ... & \alpha \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (n-1)\alpha+1 & \alpha & ... & 1 \end{vmatrix} \underset{=}{R_i \to R_i - R_1} \\ &= \begin{vmatrix} (n-1)\alpha+1 & \alpha & ... & \alpha \\ 0 & 1-\alpha & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & 1-\alpha \end{vmatrix} = ((n-1)\alpha+1)(1-\alpha)^{n-1}\end{aligned}$$

ולכן הט"ל היא איזומורפיזם רק כאשר $\alpha \neq 1, \frac{-1}{n-1}$.

2. עבור $\alpha = 1$ המטריצה A היא מטריצה שכולה **1** ולכן $ImT = sp\{(1,1,..,1)^t\}$. כמו כן, יש למעשה רק משוואה אחת ולכן מחישוב הפתרון הכללי נקבל $kerT = sp\{e_1-e_n, e_2-e_n, ..., e_{n-1}-e_n\}$. בבירור מתקיים $ImT \cap kerT = \{0\}$ ומשיקולי מימדים נקבל $ImT \oplus kerT = \mathbb{R}^n$.

לעבור על הממ"ן והממ"ח הקרובים ולדבר על השאלות שאפשר לפתור.

10 ייצוג ט"ל על ידי מטריצה

בפרק זה נלמד איך ניתן לייצג טרנספורמציה לינארית על ידי מטריצה. היות ואנחנו יודעים להתעסק במטריצות, הייצוג יאפשר לנו להשתמש בידע שלנו על מטריצות ולהשתמש בו עבור ט"ל.

הגדרה. תהי $T : V \to W$ ט"ל, V, W נוצרים סופית כך ש $B = (\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n)$ בסיס סדור של V ו-$C = (\underline{w}_1, ..., \underline{w}_m)$ בסיס סדור של W. רק במוגברת
נגדיר את המטריצה $[T]_C^B = ([T(\underline{v}_1)]_C, ..., [T(\underline{v}_n)]_C)$, כלומר זו מטריצה עם n עמודות ו-m שורות כך שהעמודה ה-i היא וקטור הקוארדינטות של $T(\underline{v}_i)$ לפי בסיס C.
כאשר $V = W, B = C$ רושמים בפשטות $[T]_B$.

על ידי מעבר למטריצות, הפעלת טרנפורמציה לינארית על וקטור שקולה לכפל מטריצות:

***משפט** (1.2.10). לכל $\underline{v} \in V$ מתקיים $[T(\underline{v})]_C = [T]_C^B[\underline{v}]_B$.*

דוגמה. נגדיר $T(x, y, z) = (x + y - z, x + 2y, y - z, y + 3z)$ ט"ל מ-$\mathbb{R}^3$ ל-$\mathbb{R}^4$. נחשב את המטריצה המייצגת את T לפי הבסיסים הסטנדרטיים. לשם כך נחשב את התמונות של איברי הבסיס:

$$\begin{aligned} T(\underline{e}_1) &= (1, 1, 0, 0)^t \\ T(\underline{e}_2) &= (1, 2, 1, 1)^t \\ T(\underline{e}_3) &= (-1, 0, -1, 3)^t \end{aligned}$$

ולכן המטריצה המייצגת היא $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = [T]_{E(\mathbb{R}^4)}^{E(\mathbb{R}^3)}$. כמו כן,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y - z \\ x + 2y \\ y - z \\ y + 3z \end{pmatrix}$$

כלומר המטריצה עושה את אותה הפעולה כמו הטרנפורמציה הלינארית על ידי כפל מטריצות.

תרגיל 10.1. נגדיר $T(x,y)=(2x,x+y)$. חשבו:

1. $[T]_E$
2. $[T]_B$ כאשר $B=((1,1),(1,0))$

פתרון: בשני המקרים נחשב את התמונה של איברי הבסיס לפי ההגדרה.

1. $T(1,0)=(2,1)$, $T(0,1)=(0,1)$ ולכן $[T]_E=\begin{pmatrix}2&0\\1&1\end{pmatrix}$.
2. $T(1,1)=(2,2)=2(1,1)$ וכן $T(1,0)=(2,1)=(1,1)+(1,0)$. לפיכך וקטורי הקוארדינטות של התמונות הינם $[T(1,1)]_B=(2,0)^t$, $[T(1,0)]_B=(1,1)^t$ ולכן $[T]_B=\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}$.

לכן - אותה ט"ל ניתנת לייצוג על ידי מטריצות ושנות בבסיסים שונים. התרגיל הבא ממחיש שעבודה עם מטריצות יכולה להיות הרבה יותר פשוטה מההגדרה המקורית של הט"ל:

תרגיל 10.2. נגדיר $T:\mathbb{R}_4[x]\to\mathbb{R}_4[x]$ על ידי $T(p(x))=xp'(x)$.

1. הוכח כי מדובר על טרנספורמציה לינארית.
2. מצא את $[T]_E$.
3. חשב את הגרעין והתמונה של הטרנספורמציה.

פתרון:

1. יהיו $p(x),q(x)\in\mathbb{R}_4[x]$ וכן $a,b\in\mathbb{R}$. מתקיים $T(ap(x)+bq(x))=x(ap(x)+bq(x))'=axp'(x)+bxq'(x)=aT(p(x))+bT(q(x))$ ולכן זו אכן ט"ל לינארית.
2. נחשב את התמונה של כל איבר בבסיס הסטנדרטי $E=(1,x,x^2,x^3)$:

$$\begin{aligned}T(x^3)&=3x^3\\T(x^2)&=2x^2\\T(x)&=x\\T(1)&=0\end{aligned}$$

ולכן $[T]_E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. קיבלנו מטריצה פשוטה מאוד ונוחה לעבודה, הרבה יותר מההגדרה המקורית של הטרנספורמציה הלינארית! כעת ניתן לעבור לסעיף הבא ולחשב את הגרעין והתמונה באמצעות המטריצה המייצגת.

3. נשים לב כי $T(p(x)) = 0$ אם"ם $[T(p(x))] = \underline{0}$ אם"ם $[T][p(x)] = \underline{0}$. כלומר פולינום כלשהו נמצא בגרעין של T אם"ם וקטור הקואורדינטות שלו הוא פתרון למערכת ההומוגנית $[T]\underline{x} = \underline{0}$.
אם ניישם את הטענה עבור טרנספורמציה זו (המטריצה כבר מדורגת!) נקבל שמרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית הוא $\{(t,0,0,0) | t \in \mathbb{R}\}$ ולכן $kerT = sp\{1\}$.
הערה חשובה: התשובה $sp\{(1,0,0,0)\}$ אינה מדויקת שכן זהו תת מרחב של $\mathbb{R}^4$ ולא של המרחב $\mathbb{R}_4[x]$ עליו מוגדרת הט"ל. הוקטור $(1,0,0,0)$ אינו וקטור בסיס של הגרעין אלא וקטור הקואורדינטות של וקטור הבסיס.

4. ראינו כי $ImT = sp\{T(1), T(x), T(x^2), T(x^3)\}$ ואלו בדיוק העמודות של המטריצה! נמיר את העמודות מקוארדינטות לפולינומים ונקבל $ImT = sp\{x, x^2, x^3\}$.

תרגיל 10.3. חשב את $[T]_B$ כאשר $B = (1, i)$, $T(z) = \overline{z}$ ט"ל מ-$\mathbb{C}$ ל-$\mathbb{C}$ מעל $\mathbb{R}$. רק במוגברת

פתרון: מתקיים $T(1) = 1, T(i) = -i$ ולכן $[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ושוב - עם המטריצה הזו יותר נוח לעבוד מאשר עם הטרנספורמציה המקורית.

תרגיל 10.4. נגדיר $T : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_3[x]$ על ידי $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+2b+c)x^2 + (3a-d)x +$ $(a-4b-2c-d)$. רק במוגברת

1. חשב את $[T]_E^{E'}$ כאשר E, E' הם הבסיסים הסטנדרטיים המתאימים.
2. חשב את הגרעין והתמונה של הט"ל.

פתרון:

1. נחשב את תמונות איברי הבסיס:

$$\begin{aligned}
[T(E^{(1,1)})]_E &= [x^2+3x+1]_E = (1,3,1)^t \\
[T(E^{(1,2)})]_E &= [2x^2-4]_E = (2,0,-4)^t \\
[T(E^{(2,1)})]_E &= [x^2-2]_E = (1,0,-2)^t \\
[T(E^{(2,2)})]_E &= [-x-1]_E = (0,-1,-1)^t
\end{aligned}$$

ולכן $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -4 & -2 & -1 \end{pmatrix} = [T]_E^{E'}$.

2. בכדי לחשב את הגרעין נדרג את המטריצה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -4 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \to R_2 - 3R_1]{R_3 \to R_3 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -3 & -1 \\ 0 & -6 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_1 \to R_1 + \frac{1}{3}R_2]{R_3 \to R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & -6 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

הפתרון הכללי הינו $sp\{(2,-1,0,6),(0,-1,2,0)\}$ **ולכן (חוזרים למרחב המטריצות!)** $kerT =$ $sp\left\{ \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

בכדי לחשב את מרחב התמונה עלינו לחשב את מרחב העמודות של המטריצה המייצגת:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -4 & -2 & -1 \end{pmatrix}^t \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -6 & -6 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן מרחב העמודות נפרש על ידי $(1,3,1),(0,1,1)$ **כלומר** $ImT = sp\{x^2+3x+1, x+1\}$.

מטריצה מייצגת מספיקה כדי להגדיר טרנספורמציה באופן חד משמעי, בדיוק באותו אופן שבו הגדרת טרנספורמציה על איברי בסיס מספיקה לצורך כך. לכן, ניתן למצוא מאפיינים רבים של ט"ל מבלי למצוא את ההגדרה המפורשת שלה, כמוראה בתרגיל הבא.

תרגיל 10.5. **תהי** $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ **המיוצגת על ידי** $[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ **כאשר** $B =$ $(1, x+1, x^2-x+1)$. **מהי הדמות של** T?

רק במוגברת

פתרון: כאמור, מרחב התמונה נפרש על ידי וקטורי העמודות של $[T]_B$. נמצא את מרחב העמודות:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 5R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן הבסיס של ImT נפרש על ידי שני פולינומים שוקטורי הקוארדינטות שלהם הינם $(1,-1,0),(0,2,1)$ ולכן $ImT = sp\{1-1(x+1), 2(x+1)+1(x^2-x+1)\} = sp\{x, x^2+x+3\}$.

טענה. אם $A \in M_{m\times n}(F)$ והטרנספורמציה $T: F^n \to F^m$ מוגדרת על ידי $T(\underline{v}) = A\underline{v}$ אז $[T]_E^{E'} = A$ כאשר E, E' הם הבסיסים הסטנדרטיים המתאימים. כלומר - כל מטריצה יכולה להיות מטריצה מייצגת של איזושהי טרנספורמציה לינארית (וכמובן, לפי ההגדרה, כל טרנספורמציה ניתנת לייצוג על ידי מטריצה). שתי עובדות אלו מתחברות במשפט הבא:

משפט (4.1.10). *יהיו V, W מ"ל ממדים n, m עם בסיסים סדורים B, C. ההעתקה $Hom_F(V,W) \to M_{m\times n}(F)$ המעתיקה לכל ט"ל T את המטריצה $[T]_C^B$ היא חד-חד ערכית ועל.*

לפי משפט 10.1.4 יש קשר הדוק בין ט"ל לבין מטריצות ומרחבים אלו הם איזומורפיים. לכן, למשל יש בסה"כ mn ט"ל בת"ל וכל ט"ל אחרת ניתנת לרישום כצ"ל של טרנספורמציות אלו. לכן, למעשה, טרנספורמציות לינאריות לא באמת קיימות, הן בסה"כ מטריצות ב"תחפושת"... לכן, ניתן להפעיל על ט"ל משפטים שהוכחו על מטריצות (ולהפך) כאשר מבצעים את התרגום הנכון (פרקים 10.3-10.5). לדוגמא:

- $[ST] = [S][T]$ (בבסיסים המתאימים). כלומר - המטריצה המייצגת הרכבה של ט"ל היא מכפלת המטריצות המייצגות. הרכבה של ט"ל היא למעשה כפל מטריצות.
- $[S+T] = [S]+[T]$; $[\lambda T] = \lambda[T]$ (באותם בסיסים)
- T הפיכה אם"ם $[T]$ הפיכה ואז $([T]_C^B)^{-1} = [T^{-1}]_B^C$.
- $\dim ImT = \rho([T])$.
- $\dim kerT = \dim P([T])$.

תרגיל 10.6. תהיינה $T, S: V \to V$ ט"ל כאשר V נוצר סופית. הוכח: $TS: V \to V$ איזומורפיזם אם"ם $ST: V \to V$ איזומורפיזם.

פתרון: יהי B בסיס סדור של V.

TS איזומורפיזם אם"ם $[TS]_B$ הפיכה. מתקיים $[TS]_B = [T]_B[S]_B$ ולפי פרק 3 $[TS]$ הפיכה אם"ם $[T],[S]$ שתיהן הפיכות. זה מתקיים אם"ם $[S][T] = [ST]$ הפיכה כלומר ST איזומורפיזם.

10.1 מעבר בין בסיסים

תהי $T : V \to V$ ונניח כי ידוע $[T]_B$.האנו מעוניינים לחשב את $[T]_{B'}$, כלומר למצוא את הקשר בין שתי מטריצות המייצגות את אותה ט"ל בבסיסים שונים. נתחיל ב-$[\underline{v}]_{B'}$. כדי לחשב את $[T(\underline{v})]_{B'}$ (לבנות את המשוואה בסעיף השלישי מימין לשמאל):

1. ראשית נמיר את וקטור הקוארדינטות לבסיס B: $[\underline{v}]_B = M[\underline{v}]_{B'}$.
2. כעת ניתן להפעיל את הטרנספורמציה ונקבל $[T(\underline{v})]_B = [T]_B M[\underline{v}]_{B'}$.
3. אנו מעוניינים בתמונה בבסיס B' ולכן נפעיל את מטריצת המעבר ההפוכה ונקבל

$$[T(\underline{v})]_{B'} = M^{-1}[T]_B M[\underline{v}]_{B'}$$

4. לפיכך, $[T]_{B'} = M^{-1}[T]_B M$.

כלומר - באמצעות מטריצות המעבר בין הבסיסים אפשר לחשב את המטריצה המייצגת את הטרנספורמציה בבסיס אחר.

תרגיל 10.7. תהי $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ המיוצגת בבסיס $B = (1, x+1, 2x^2+4x+3)$ על ידי המטריצה
$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. חשב את $T(2x^2 - x + 2)$.
2. חשב את $[T]_E$ כאשר $E = (1, x, x^2)$.

פתרון:

1. נרשום את הוקטור כצ"ל של איברי הבסיס:

$$\begin{aligned} 2x^2 - x + 2 &= (2x^2+4x+3) - 4x - 3 - x + 2 \\ &= (2x^2+4x+3) - 5(x+1) + 4 \cdot 1 \end{aligned}$$

לכן $[2x^2 - x + 2]_B = (4, -5, 1)^t$. נכפול במטריצה המייצגת ונקבל
$$[T(2x^2+4x+3)]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}$$
כלומר $T(2x^2+4x+3) = 2 - 8(x+1) + (2x^2+4x+3) = 2x^2 - 4x - 3$

2. נפתור בשתי דרכים:

א) חישוב מפורש של תמונות איברי הבסיס:

באופן דומה לסעיף הראשון נחשב את התמונות של איברי הבסיס E:

$$\begin{aligned}
T(1) &= 1 \\
T(x) &= T(x+1) - T(1) \\
&= 2 + 2(x+1) - 2 \\
&= 2x + 2 \\
T(x^2) &= \frac{1}{2}T(2x^2+4x+3) - 2T(x) - \frac{3}{2}T(1) \\
&= x^2 - x - 1.5
\end{aligned}$$

ולכן $[T]_E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1.5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

ב) נחשב את מטריצת המעבר מהבסיס E ל-B

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

וחישוב ישיר מגלה כי $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0.5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$ ולכן $[T]_E = M[T]_B M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1.5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

תרגיל 10.8. תהי $T: V \to V$ כאשר $\dim V = 3$. נניח כי $T \neq 0$ אבל $T^2 = 0$. הוכח שקיים בסיס B עבורו $[T]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

פתרון אינטואיטיבי: על ידי הסתכלות על מה שצריך להוכיח אפשר להבין איך לבנות את הבסיס הזה. נניח ש- $B = (b_1, b_2, b_3)$ הבסיס המבוקש. בבסיס הזה מתקיים $T(b_1) = T(b_2) = 0$ כלומר $\{b_1, b_2\} \subseteq kerT$. כמו כן, ברור ש-$T$ לא ט"ל האפס ולכן זהו הבסיס. כמו כן, כדי שהמטריצה המייצגת תהיה כמו שדרוש, חייב להתקיים $T(b_3) = b_1$. לכן b_1 צריך להיות וקטור בגרעין של T שהוא גם בתמונה. לכן מה שיש להוכיח הוא שיש b_1 כזה ושהגרעין מימד 2. את ההוכחה הפורמלית נשאיר לקורא כתרגיל...

פתרון פורמלי (להשאיר לסטודנטים כתרגיל): לכל $\underline{v} \in ImT$ קיים $\underline{w} \in V$ כך ש $T(\underline{w}) = \underline{v}$ ולכן $0 = T^2(\underline{w}) = T(\underline{v})$, כלומר $\underline{v} \in kerT$. לפיכך $ImT \subseteq kerT$ ומשיקולי ממדים $\dim ImT = 1, \dim kerT = 2$. לכן קיים $0 \neq \underline{v}_1 \in ImT$ המהווה בסיס למרחב זה וניתן להשלים אותו לבסיס של $kerT$ עם וקטור נוסף $\underline{v}_2$. יהי $\underline{w} \in V$ כך ש $T(\underline{w}) = \underline{v}_1$. מאחר ו-$T(\underline{w}) \neq 0$ הרי ש-$\underline{w}$ אינו צ"ל של $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ (כי כל הצ"ל הם הגרעין) ולכן הקבוצה $B = (\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{w})$ בת"ל ומהווה בסיס ל-V. נותר רק לחשב את המטריצה המייצגת:

$$
\begin{aligned}
[T(\underline{v}_1)]_B &= [T(\underline{v}_2)]_B = (0,0,0)^t \\
[T(\underline{w})]_B &= [\underline{v}_1]_B = (1,0,0)^t
\end{aligned}
$$

ולכן $[T]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ כנדרש.

תרגיל 10.9. נגדיר $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ על ידי $T(X) = AX$ כאשר $A \in M_2(\mathbb{R})$. האם $[T]_E = A$? רק במוגברת

פתרון: לא! הבסיס הסטנדרטי של $M_2(\mathbb{R})$ מכיל **4** מטריצות לכן $[T]_E$ היא מטריצה 4×4. הטענה נכונה רק אם מדובר על מרחבי n-יות, לא מרחבי מטריצות.

תרגיל 10.10. תהי $T : V \to V$ ט"ל המקיימת $T^3 = 0$ ונתון $\underline{v} \in V$ כך ש $T^2\underline{v} \neq \underline{0}$. רק במוגברת

1. הוכח כי $\{\underline{v}, T\underline{v}, T^2\underline{v}\}$ בת"ל.
2. הוכח שאם $\dim V = 3$ אז $kerT \subset ImT$ וקיים בסיס B כך ש $[T]_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

פתרון:

1. נתבונן במשוואה $\lambda_1\underline{v} + \lambda_2T\underline{v} + \lambda_3T^2\underline{v} = \underline{0}$. נפעיל את T^2 על שני האגפים, נשתמש בכך ש $T^3 = T^4 = 0$ ונקבל $\lambda_1T^2\underline{v} = \underline{0}$ לכן $\lambda_1 = 0$. באופן דומה נפעיל את T ונקבל $\lambda_2 = 0$ ולכן $\lambda_3 = 0$ כלומר הקבוצה בת"ל.
2. באופן טריוויאלי $T^2\underline{v} \in ImT$ וכן $T^2\underline{v} \in kerT$. כמו כן, $\{T\underline{v}, T^2\underline{v}\} \subset ImT$ ומשיקולי ממדים נקבל $kerT = sp\{T^2\underline{v}\}, ImT = sp\{T\underline{v}, T^2\underline{v}\}$ ולכן $kerT \subset ImT$.

   נבחר $B = (T^2\underline{v}, T\underline{v}, \underline{v})$. חישוב ישיר מראה שאכן $[T]_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

10.2 דימיון מטריצות

בסעיף הקודם ראינו מה צריך להיות הקשר בין שתי מטריצות כדי שייצגו את אותה ט"ל. יחס זה נקרא דימיון בין מטריצות.

הגדרה (10.7.1). המטריצות $A, B \in M_n$ נקראות דומות אם"ם קיימת M הפיכה כך ש- $A = M^{-1}BM$.

יחס הדימיון הוא יחס שקילות (שאלה 10.7.1; לצייר יחס שקילות). לכן אפשר לחלק את כל המטריצות לקבוצות של מטריצות שדומות זו לזו ולא דומות לאף מטריצה אחרת. הרעיון מאחורי מטריצות דומות נובע מתוך הקשר לט"ל אותה הן מייצגות:

***משפט (2.7.10).** מטריצות דומות אם"ם הן מייצגות את אותה ט"ל בבסיסים שונים.*

לכן, תכונות שמקבלת מטריצה מהט"ל אותה היא מייצגת יהיו זהות. למשל, הדרגה של המטריצה היא ממד מרחב העמודות השווה ל$\dim ImT$ ולכן למטריצות דומות יש אותה דרגה: אם A, B דומות אז $\rho(A) = \rho(B)$. באופן דומה, אם A, B דומות אז $\det(A) = \det(B)$ (טענה 10.7.3).

הגדרה (10.7.4). תהי $A \in M_n$. העקבה ($trace$) של המטריצה מוגדרת להיות סכום איברי האלכסון הראשי: $tr(A) = a_{11} + ... + a_{nn}$.

למטריצות דומות יש עקבה זהה.

דוגמה. מצא את כל המטריצות הדומות למטריצת היחידה ולמטריצת האפס.

לכל M הפיכה $M^{-1}IM = I$ לכן מטריצת היחידה דומה רק לעצמה. באופן דומה $M^{-1}0M = 0$ ולכן מטריצת האפס דומה רק לעצמה. זה הגיוני: ט"ל האפס שולחת כל וקטור לוקטור האפס ולכן הייצוג שלה בכל בסיס יהיה מטריצת האפס. ט"ל הזהות שולחת כל וקטור לעצמו ולכן הייצוג שלה בכל בסיס יהיה מטריצת היחידה. באופן כללי (יש בספר) המטריצה λI דומה רק לעצמה.

תרגיל 10.11. $A, B \in M_n$הוכח או הפרך:

1. אם A, B שקולות שורות אז הן דומות.
2. אם A סינגולרית אז היא דומה למטריצה עם שורת אפסים.
3. אם A, B דומות אז הן שקולות שורות.

פתרון:

1. לא נכון. למשל, מטריצות הפיכות שקולות שורות למטריצת היחידה אבל ראינו שאינן דומות לה.

2. נכון. תהי A מטריצה סינגולרית. לכן ניתן לדרג אותה ולקבל מטריצה עם שורת אפסים. נסמן את המטריצה המדורגת בתור B. לכן קיימת מטריצה הפיכה E כך ש $B = EA$. נכפול מימין ב- E^{-1}, נסמן $C = BE^{-1}$ ונקבל $C = EAE^{-1}$ לכן A, C דומות. כמו כן נשים לב כי ב-B יש שורת אפסים ולכן גם ב-BE^{-1} אותה השורה היא שורת אפסים, לכן ב-C יש שורת אפסים ואכן קיבלנו שהמטריצה הסינגולרית דומה למטריצה עם שורת אפסים.

3. לא נכון. נסתכל על הט"ל $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ המוגדרת על איברי הבסיס $T(\underline{e}_1) = \underline{e}_1, T(\underline{e}_2) = \underline{0}$. נסמן $E = (\underline{e}_1, \underline{e}_2), E' = (\underline{e}_2, \underline{e}_1)$. חישוב ישיר מראה כי $[T]_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ וכן $[T]_{E'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. שתי המטריצות מייצגות את אותה ט"ל ולכן הן דומות אבל הן לא שקולות שורות כי כל הפעולות האלמנטריות שומרות על עמודת האפסים.

מסקנה חשובה: אסור לדרג מטריצה מייצגת! ברגע שמבצעים פעולה אלמנטרית כלשהי על מטריצה מייצגת, היא מייצגת כבר ט"ל אחרת!

תרגיל 10.12. תהי $A \in M_2(\mathbb{R})$ דומה ל- $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$. הוכח: $(A - aI)(A - bI) = 0$.

פתרון: ראשית נשים לב שעבור המטריצה D מתקיים:

$$(D - aI)(D - bI) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b-a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a-b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

כמו כן, המטריצות דומות לכן קיימת מט' הפיכה P כך ש-$D = P^{-1}AP$. נציב זאת במשוואה שקיבלנו: $(P^{-1}AP - aI)(P^{-1}AP - bI) = 0$. בנוסף, $P^{-1}IP = I$ ולכן המשוואה האחרונה שקולה ל:

$$\begin{aligned} 0 &= (P^{-1}AP - aP^{-1}IP)(P^{-1}AP - bP^{-1}IP) \\ &= P^{-1}(A - aI)PP^{-1}(A - bI)P = P^{-1}(A - aI)(A - bI)P \end{aligned}$$

נצמצם את המטריצות ההפיכות ונקבל את הדרוש: $(A - aI)(A - bI) = 0$.

התרגיל האחרון ממחיש שלעיתים קל להוכיח משהו על מטריצה פשוטה שדומה למטריצה המקורית, ומשם לקבל שהתכונה מתקיימת גם למטריצה המקורית. דימיון מטריצות יבוא לידי ביטוי בצורה יותר נרחבת תוך הצגת השימוש המרכזי שלו בקורס זה ביחידה הבאה.

לעבור על הממ"ן והממ"ח הקרובים ולדבר על השאלות שאפשר לפתור.

11 לכסון

תהי $T : V \to V$ ט"ל כאשר $\dim V = n$. ראינו בפרק הקודם שניתן להציג את T בבסיסים שונים כמטריצה. באיזה בסיס כדאי לעבוד? איך למצוא בסיס B כך ש$[T]_B$ פשוטה עד כמה שניתן? ראינו במספר דוגמאות שמטריצה אלכסונית מאוד נוחה לעבודה (כבר מדורגת וכד') ולכן ביחידה הזו נבדוק מתי יש בסיס בו $[T]_B$ אלכסונית.

הגדרה (11.1.1). ט"ל T לכסינה אם קיים בסיס B כך ש- $[T]_B$ אלכסונית. אם $B = (\underline{b}_1, ..., \underline{b}_n)$ בסיס כזה, אז $[T]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$ ומתקיים לכל i: $T(\underline{b}_i) = \alpha_i \underline{b}_i$.

לכן וקטורים שהשפעת הט"ל עליהם היא פשוט כפל בקבוע מעניינים אותנו במיוחד ומגדירים:

הגדרה (11.2.2). סקלר $\lambda \in F$ הוא ערך עצמי (ע"ע) של T אם קיים $0 \neq \underline{v} \in V$ כך ש $T(\underline{v}) = \lambda \underline{v}$. וקטור $\underline{v}$ כזה נקרא וקטור עצמי (ו"ע) של T השייך לערך העצמי λ או פשוט ו"ע של λ.

שאלה: למה הדרישה $\underline{v} \neq 0$?

תשובה: כי $\underline{0}$ מקיים את הקשר הזה תמיד ולכן לא מעניין.

דוגמה. נגדיר $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ על ידי $T(x, y, z) = (3x + y, 3y, 2z)$. מתקיים:
$T(1, 0, 0) = (3, 0, 0) = 3(1, 0, 0)$ לכן $(1, 0, 0)$ הוא ו"ע של הערך העצמי 3.
כמו כן, $T(0, 0, 1) = (0, 0, 2) = 2(0, 0, 1)$ לכן $(0, 0, 1)$ הוא ו"ע של 2.
האם יש עוד ע"ע? האם יש עוד ו"ע? תכף נראה שיטה כללית למציאת כל הע"ע וכל הו"ע של ט"ל.

בהתאם ללוגיקה שהוצגה בהגדרה הראשונה, נקבל את האפיון הבא של ט"ל לכסינה:

משפט (3.2.11'). *T לכסינה אם"ם קיים בסיס של V המורכב מו"ע של T.*

טענה. : רק במוגברת

1. אם λ ע"ע של T אז לכל $n \in \mathbb{N}$, λ^n ע"ע של T^n.
2. אם λ ע"ע של Tאז לכל $c \in F$, $c\lambda$ ע"ע של cT.
3. תוצאה חשובה: $\lambda = 0$ הוא ע"ע של T אם"ם Tלא חח"ע.

נגדיר $V_\lambda = \{\underline{v} \in V | T\underline{v} = \lambda\underline{v}\}$ קבוצת כל הו"ע של סקלר λ (וגם וקטור האפס), גם אם הוא לא ע"ע. לפי שאלה **11.2.1** קבוצה זו היא מרחב לינארי ונקראת המרחב העצמי של (הערך העצמי) λ.

דוגמה. הקבוצה V_0 היא קבוצת כל הוקטורים שמקיימים $T\underline{v} = 0\underline{v} = \underline{0}$ כלומר $V_0 = \ker T$.

משפט (4.2.11). *ו"ע של ע"ע שונים הם בת"ל.*

מסקנה (5.2.11). *אם $\dim V = n$ ואם ל-$T : V \to V$ יש n ע"ע שונים, אז היא לכסינה.*

תרגיל 11.1. תהי $T(x,y) = (x+4y, 2x+3y)$ ט"ל. מצא ע"ע, לכל ע"ע מצא מרחב עצמי וקבע האם T לכסינה.

פתרון: נבנה את המשוואה שע"ע צריך לקיים: $T(x,y) = \lambda(x,y)$. נציב את הגדרת הט"ל ונקבל מערכת משוואות עם פרמטר: $\begin{cases} x+4y &= \lambda x \\ 2x+3y &= \lambda y \end{cases}$ כלומר $\begin{cases} (1-\lambda)x+4y &= 0 \\ 2x+(3-\lambda)y &= 0 \end{cases}$. דורשים שלמערכת יש פתרון לא טריוויאלי כלומר המטריצה המצומצמת צריכה להיות סינגולרית. נבדוק זאת עם חישוב דטרמיננטה ונקבל שהיא אפס רק כאשר $\lambda = -1, 5$.

לכל ע"ע נמצא מרחב עצמי. המרחב העצמי הוא מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית. נציב $\lambda = -1$ ונקבל $\begin{cases} 2x+4y &= 0 \\ 2x+4y &= 0 \end{cases}$ והפתרון הוא $V_{-1} = sp\{(-2,1)\}$.

נציב $\lambda = 5$, נקבל $\begin{cases} 4x-4y &= 0 \\ -2x+2y &= 0 \end{cases}$ ולכן $V_5 = sp\{(1,1)\}$.

לט"ל יש שני ע"ע וזהו מרחב ממימד 2 לכן הט"ל לכסינה ולמשל בבסיס $B = ((1,1),(-2,1))$ מתקיים $[T]_B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

הערה. הסדר שבו הע"ע רשומים על האלכסון הוא הסדר בו הו"ע רשומים בבסיס. לכן הצורה המלוכסנת היא יחידה עד כדי תמורות של איברי האלכסון.

שאלה **11.2.10** נותנת איפיון טוב למתי ט"ל לכסינה. ט"ל לכסינה כאשר $\dim V = \dim V_{\lambda_1} + ... + \dim V_{\lambda_k}$ כאשר $\lambda_1, ..., \lambda_k$ הם כל הע"ע של הט"ל.

11.1 ע"ע וו"ע של מטריצות (ריבועיות)

ההגדרות זהות לאלו של ט"ל:

- $\lambda \in F$ ע"ע של $A \in M_n(F)$ אם"ם קיים $0 \neq v \in F^n$ כך ש $Av = \lambda v$.
- כל וקטור כזה נקרא ו"ע של A.

- מרחב עצמי מוגדר באופן אנלוגי.

כזכור, מטריצות וט"ל איזומורפיים ונקבל לפי משפט **11.3.2** שעבור $T : V \to V$ ממד סופי ו-$A = [T]_B$ בבסיס כלשהו מתקיים:

1. ל-T ול-Aאותם ע"ע.
2. $v \in V$ ו"ע של λ אם"ם $[v]_B$ ו"ע של A.

***משפט** (3.3.11). למטריצות דומות אותם ע"ע.*

הגדרה. מטריצה A נקראת לכסינה אם קיימת מטריצה הפיכה P כך ש $P^{-1}AP$ אלכסונית. כלומר A לכסינה אם"ם היא דומה למטריצה אלכסונית. כזכור, מטריצות דומות מייצגות את אותה ט"ל בבסיסים שונים ומכאן נקבל שאם $A = [T]_B$ אז T לכסינה אם"ם A לכסינה.

***משפט** (7.3.11). העמודות של המטריצה המלכסנת P הם ו"ע בלתי תלויים של A. סדר הו"ע ב-P זהה לסדר של הע"ע על האלכסון של המטריצה האלכסונית.*

11.2 פולינום אופייני של מטריצה

אנחנו יודעים שλ ע"ע אם ורק אם קיים $v \neq 0$ כך ש- $Av = \lambda v$ כלומר אם"ם יש פתרון לא טריוויאלי למשוואה $(\lambda I - A)x = 0$ וזה קורה אם"ם $\det(\lambda I - A) = 0$. לכן כדי למצוא ע"ע אפשר לחשב את הדטרמיננטה ולבדוק מתי היא מתאפסת.

הפונקציה $p_A(t) = \det(tI - A)$ היא פולינום של t (כי בדטרמיננטה יש רק כפל וחיבור) ונקראת הפולינום האופייני של A. λ הוא ע"ע של A אם"ם הוא שורש של הפולינום האופייני. כמו כן, המרחבים העצמיים הם מרחבי הפתרונות $P(\lambda I - A)$ עבור הערכים העצמיים.

תרגיל 11.2. נגדיר $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$ מצא ע"ע וקבע האם המטריצה לכסינה. אם כן, מצא מטריצה מלכסנת ואת האלכסונית לה היא דומה.

פתרון: נחשב פולינום אופייני:

$$\begin{aligned} p_A(t) &= \det(tI - A) = \det \begin{pmatrix} t-5 & 6 & 6 \\ 1 & t-4 & -2 \\ -3 & 6 & t+4 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & -t^2+9t-14 & 2t-4 \\ 1 & t-4 & -2 \\ 0 & 3t-6 & t-2 \end{pmatrix} \\ &= (t-2)^2(-1)\det \begin{pmatrix} 7-t & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = (t-1)(t-2)^2 \end{aligned}$$

לכן הערכים העצמיים של A הם $\lambda = 2, 1$.

נמצא מרחבים עצמיים:

$$2I - A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 6 \\ 1 & -2 & -2 \\ -3 & 6 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן $V_2 = sp\{(2,1,0),(2,0,1)\}$.

$$I - A = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 6 \\ 1 & -3 & -2 \\ -3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן $V_1 = sp\{(3,-1,3)\}$.

לסיכום, A לכסינה (יש בסיס של $\mathbb{R}^3$ המורכב מו"ע של A), דומה למטריצה $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ והמטריצה המלכסנת היא $P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

הערה. המטריצות P, D אינן יחידות.

בדיקה: $P^{-1}AP = D$. בדיקה יותר קלה שלא דורשת הפיכת מטריצות: $AP = PD$.

תרגיל 11.3. כנ"ל עבור $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

פתרון: נחשב פולינום אופייני: $p_A(t) = \det(tI - A) = \det \begin{pmatrix} t-1 & 1 \\ -2 & t+1 \end{pmatrix} = t^2 + 1$. לפולינום אין ע"ע לכן המטריצה אינה לכסינה מעל $\mathbb{R}$. מצד שני, מעל $\mathbb{C}$ למטריצה שני ע"ע והיא לכסינה מעל $\mathbb{C}$ ודומה למטריצה $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$.

תרגיל 11.4. כנ"ל עבור $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

פתרון: נחשב פולינום אופייני: $p_A(t) = (t-2)^2$ ולכן הע"ע היחיד הוא 2. מצד שני, $\dim V_2 = 1$ לכן אין שני ו"ע בת"ל ל-A ולכן היא לא לכסינה.

שלושת הדוגמאות הללו מציגות את 3 האפשרויות שיכולות להיות: מטריצה יכולה להיות לכסינה תמיד, לא לכסינה תמיד או לכסינה בשדה מסוים אבל לא באחר.

משפט (שאלות *7.4.5-11.4.11*)*. הפולינום האופייני של מטריצה $n \times n$ הוא פולינום מתוקן ממעלה n שהמקדם של t^{n-1} הוא $-tr(A)$ והמקדם החופשי הוא $(-1)^n \det A$.*

11.2.1 ריבויים

עבור מטריצה A, מגדירים לכל λ שני ריבויים:

- ריבוי אלגברי: $r_{alg}(\lambda)$: החזקה של $t-\lambda$ בפולינום האופייני של A.
- ריבוי גאומטרי: $r_{geo}(\lambda) = \dim V_\lambda$.

לפי משפט **11.5.2** מתקיים לכל λ (לאו דווקא ע"ע): $r_{alg}(\lambda) \geq r_{geo}(\lambda)$.

אם λ אינו ע"ע אז שניהם שווים לאפס. אם λ ע"ע אז $r_{geo}(\lambda) \geq 1$.

כמו כן, $r_{geo}(\lambda) = n - \rho(\lambda I - A)$.

ריבובים מאוד שימושיים כדי לבדוק אם המטריצה לכסינה. לפי משפט **11.5.4** מטריצה לכסינה אם"ם הריבוב האלגברי והגאומטרי של כל ע"ע שווים והפולינום האופייני מתפרק לגורמים לינאריים.

מקרה פרטי: אם $r_{alg}(\lambda) = 1$ אז גם $r_{geo}(\lambda) = 1$ כי $1 \leq r_{geo}(\lambda) \leq r_{alg}(\lambda)$.

לכן כדי ללכסן מטריצה צריך:

1. לחשב פולינום אופייני ולוודא שמתפרק לגורמים לינאריים (אחרת - לא לכסינה!)
2. למצוא שורשים = ערכים עצמיים.
3. אם יש n ע"ע שונים - היא לכסינה.
4. אם לא - לחשב לכל ע"ע ריבוי אלגברי וגאומטרי.
5. אם כל ריבוי אלגברי שווה לגאומטרי - לכסינה. אחרת - לא.

תרגיל 11.5. עבור אילו ערכי a המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & a \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$ לכסינה?

פתרון: נחשב את הפולינום האופייני $p_A(t) = (t-a)(t-1)(t-2)$. ולכן הע"ע הם $a, 1, 2$. בבירור, עבור $a \neq 1, 2$ יש 3 ע"ע שונים ולכן המטריצה לכסינה. נשאר לבדוק רק את המקרים $a = 1, 2$.

- עבור $a = 1$ יש לע"ע **1** ריבוי אלגברי **2**. נבדוק את הגאומטרי:

$$r_{geo}(1) = 3 - \rho(1I - A) = 3 - \rho\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

והמטריצה לא לכסינה.

- עבור $a = 2$ לע"ע **2** יש ריבוי אלגברי **2**. נבדוק את הגאומטרי:

$$\rho_{geo}(2) = 3 - \rho(2I - A) = 3 - \rho\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

ושוב המטריצה לא לכסינה.

לסיכום, המטריצה לכסינה אם"ם $a \neq 1, 2$.

הערה. הסקלר λ הוא ע"ע של מטריצה אם"ם $\lambda I - A$ סינגולרית. ויש הרבה דרכים לספק את הנתון. למשל: $\lambda I - A$ סינגולרית אם"ם $\det(\lambda I - A) = 0$ אם"ם $\rho(\lambda I - A) < n$.

תרגיל 11.6. תהי $A \in M_3(\mathbb{R})$ סינגולרית כך ש-$\rho(A) > \rho(A - 3I)$. האם המטריצה לכסינה?

פתרון: מהנתון ש-A סינגולרית נקבל $\rho(A) \leq 2$ ולכן $0 \leq \rho(A - 3I) < 2$. אם $\rho(A - 3I) = 0$ אז $A - 3I = 0$ כלומר A היא המטריצה הרגולרית $3I$. לכן $\rho(A - 3I) \neq 0$ והאפשרות היחידה היא $\rho(A - 3I) = \rho(3I - A) = 1$. לכן **3** הוא ע"ע של A עם ריבוי גאומטרי $3 - \rho(3I - A) = 2$.

בנוסף, המטריצה סינגולרית לכן 0 הוא ע"ע שלה גם כן. בהכרח $\rho(A) = 2$ ולכן הריבוב הגאומטרי הוא $3 - \rho(A) = 1$.

מצאנו שני ע"ע למטריצה 3×3, אחד עם ריבוי גאומטרי **2** ואחד עם ריבוי גאומטרי **1** ולכן יש בסיס שמורכב מו"ע של המטריצה והיא לכסינה ודומה ל-$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

תרגיל 11.7. נתונה מטריצה 3×3 כך ש- $\rho(A + 5I) = 2$, $\det(A + I) = 0$ ולמשוואה $Ax = 2x$ יש אינסוף פתרונות. מצא את הפולינום האופייני של המטריצה? מהי הדטרמיננטה שלה ומהו מימד מרחב הפתרונות של המערכת $Ax = 5x$?

פתרון: כל אחד מהנתונים מרמז על ע"ע אחר:

- מתקיים $\rho(A + 5I) = \rho(-5I - A) = 2 < 3$ ולכן -5 הוא ע"ע.

- מתקיים $\det(A+I)=\det(-I-A)=0$ ולכן -1 הוא ע"ע.
- למערכת $Ax=2x$ אינסוף פתרונות לכן כל פתרון כזה הוא ו"ע עם ע"ע 2.

לכן למטריצה 3 ע"ע שונים, היא לכסינה ודומה למטריצה $\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ולכן הפולינום האופייני הוא $(t+5)(t+1)(t-2)$, הדטרמיננטה היא 10 ולמערכת $Ax=5x$ פתרון יחיד אחרת 5 היה ע"ע רביעי.

תרגיל 11.8. הוכח שאם A,B דומות אז יש אותו ריבוי גאומטרי לכל λ.

פתרון: פתרון קצר: A,B דומות ולכן מייצגות אותה ט"ל בבסיסים שונים. לכן יש להם אותם ע"ע ואותו ריבוי גאומטרי לכל ערך כי הריבוי הגאומטרי הוא מימד המרחב העצמי שאינו משתנה.

פתרון ארוך: A,B דומות לכן קיימת P הפיכה כך ש- $B=P^{-1}AP$. נחשב את הריבוי הגאומטרי:

$$\lambda I-B=\lambda I-P^{-1}AP=\lambda P^{-1}IP-P^{-1}AP=P^{-1}(\lambda I-A)P$$

כפל במטריצה הפיכה לא משנה את הדרגה ולכן $\rho(\lambda I-B)=\rho(\lambda I-A)$ ולכן יש להם אותו ריבוי גאומטרי.

באותו אופן אפשר להוכיח שלמטריצות דומות יש אותו פולינום אופייני, אותם ע"ע, אותה דטרמיננטה, אותה עקבה, אותם ריבויים לכל ע"ע.

יחד עם זאת, ההפך לא נכון. ייתכן שיש למטריצות אותו פולינום אופייני, אותם ע"ע, אותה דטרמיננטה, אותה עקבה ואותם ריבויים לכל ע"ע אבל הן לא דומות. (יש דוגמאות נגדיות אבל קשה להוכיח שמטריצות לא לכסינות לא דומות בכלים של לינארית 1)

שיטה להוכחת דימיון: לנסות ללכסן את שתי המטריצות בו זמנית. אם אפשרי - קל לבדוק האם האלכסוניות דומות. אם אחת לכסינה ואחת לא - הן לא דומות. אם שתיהן לא לכסינות - לקוות שמתישהו במהלך תהליך הלכסון משהו "ישתבש" (ע"ע שונים, ריבויים שונים וכו', אחרת זה קשה).

תרגיל 11.9. האם $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$ ו- $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ דומות?

פתרון: לא. קל לראות $tr(A)=-3\neq 5=tr(B)$.

תרגיל 11.10. האם $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ו- $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ דומות?

פתרון: נחשב את הפולינום האופייני ונקבל $p_A(t) = (t-1)^3$ ולכן שתי המטריצות לא לכסינות (למה?). נבדוק ריבויים גאומטריים של הע"ע:

$$\rho(1I - A) = \rho \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$\rho(1I - B) = \rho \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

הדרגות שונות לכן הריבויים שונים ולכן המטריצות לא דומות.

תרגיל 11.11. האם $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ו-$B = \begin{pmatrix} -13 & -8 & -4 \\ 12 & 7 & 4 \\ 24 & 16 & 7 \end{pmatrix}$ דומות?

פתרון: נשים לב ש-A אלכסונית ולכן לכסינה ונותר רק לנסות ללכסן את B. נחשב את הפולינום האופייני:

$$p_B(t) = \det \begin{pmatrix} t+13 & 8 & 4 \\ -12 & t-7 & -4 \\ -24 & -16 & t-7 \end{pmatrix} = ... = t^3 - t^2 - 5t - 3$$

מהם השורשים? קשה למצוא את השורשים של פולינום ממעלה 3, אבל יש לנו ניחוש - הע"ע של A. אם הם לא יאפסו את הפ"א של B אז בוודאות המטריצות לא דומות. מתקיים:

$$p_B(-1) = -1 - 1 + 5 - 3 = 0; p_B(3) = 27 - 9 - 15 - 3 = 0$$

כדי למצוא ע"ע שלישי אפשר להשתמש בחילוק פולינומים (פרק 6) או לרשום $p_B(t) = (t-3)(t+1)(t-a)$ לפתוח סוגריים ולקבל ש$a = -1$. כלומר ל-B שני ע"ע: 3 עם ר.א. 1 ו -1 עם ר.א. 2. נחשב ריבוי גאומטרי:

$$r_{geom}(-1) = 3 - \rho\begin{pmatrix} 12 & 8 & 4 \\ -12 & -8 & -4 \\ -24 & -16 & -8 \end{pmatrix} = 2$$

באופן טריוויאלי $r_{geom}(3) = 1$ כלומר לכל אחד מהע"ע מתקיים ר.א.=ר.ג. וגם הפולינום האופייני מתפרק לגורמים לינאריים, לכן B לכסינה ודומה ל-A.

תרגיל 11.12. חשב את A^{50}עבור $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

פתרון: אפשר לנסות להעלות בחזקות קטנות ולבדוק האם יש חוקיות. אפשרות יותר טובה: נוח להעלות בחזקה מטריצות אלכסוניות ולכן ננסה ללכסן את A.

אחרי חישוב סטנדרטי נקבל ש-A דומה ל-$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ עם המטריצה המלכסנת $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
לכן $D = P^{-1}AP$. לכן $D^{50} = (P^{-1}AP)^{50} = P^{-1}APP^{-1}A...AP = P^{-1}A^{50}P$
ולכן $A^{50} = PD^{50}P^{-1}$ ואת D^{50}קל לחשב, זה בדיוק $D^{50} = \begin{pmatrix} 5^{50} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (החישוב עצמו פחות מעניין, מה שחשוב שזה אפשרי בקלות).

תרגיל 11.13. הוכח או הפרך:

1. אם $A \in M_n(\mathbb{R})$ והריבוי האגלברי של כל ע"ע $\lambda \in \mathbb{R}$ הוא **1** אז A לכסינה מעל $\mathbb{R}$.
2. אם A, B דומות אז לכל $k \in \mathbb{N}$ גם A^k, B^k דומות.
3. המטריצות A, B מסדר 2×2 לכסינות עם אותה עקבה ואותה דטרמיננטה. אז הן דומות.

פתרון:

1. הטענה לא נכונה. למשל עבור $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ מתקיים $p_A(t) = t^2 + 1$. לכן אין שורשים עצמיים ממשיים (הטענה מתקיים באופן ריק) אבל המטריצה אינה לכסינה מעל $\mathbb{R}$.
2. הטענה נכונה. קיימת $P \in M_n$ הפיכה כך ש- $B = P^{-1}AP$. לכן $B^k = P^{-1}A^kP$ והן דומות.
3. כן. $p_A(t) = t^2 - tr(A)t + \det(A) = t^2 - tr(B)t + \det B = p_A(t)$. לכן למטריצות אותו פולינום אופייני, אותם שורשים ולכן הן דומות לאותה מטריצה אלכסונית. לכן הן דומות זו לזו.

תרגיל 11.14. מתקיים $A^2 = A^3$ כאשר A לכסינה. לכן $A^2 = A$.

פתרון: שימוש נוסף במטריצות לכסינות - להראות שהטענה נכונה למטריצה אלכסונית ואז להסיק שהנכונות נשמרת גם על ידי יחס הדימיון. לכן נבדוק קודם האם הטענה נכונה למטריצה אלכסונית.

טענת עזר: אם $D^2 = D^3$ כאשר D אלכסונית אז $D^2 = D$.

הוכחה: תהי $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$. מדובר על מטריצה אלכסונית לכן החזקה היא פשוט החזקה של האיברים על האלכסון ולכן מתקיים $\lambda_i^3 = \lambda_i^2$ כלומר $\lambda_i = 1$ או $\lambda_i = 0$. בשני המקרים $\lambda_i^2 = \lambda_i$כלומר $D = D^2$. מש"ל.

נוכיח את הטענה המרכזית. תהי A כך ש-$A^2 = A^3$ ו-A לכסינה. לכן A דומה ל-D אלכסונית. בדומה לתרגיל הקודם, $A^2 = A^3$ ולכן $D^2 = D^3$ ולפי טענת העזר $D^2 = D$ כלומר $A^2 = A$

תרגיל 11.15. תהי $A \in M_3(\mathbb{R})$ שהפולינום האופייני שלה הוא $p_A(t) = t^3+2t^2-3t$. הוכח כי A^2+A-2I דומה ל- $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

פתרון: השורשים של הפולינום האופייני הם $0, 1, -3$ לכן A דומה ל-$D = diag(1, -3, 0)$. חישוב ישיר מראה כי $D^2 + D - 2I = diag(0, 4, -2)$ ולכן $A^2 + A - 2I$ דומה למטריצה הזו (אותה P מלכסנת גם את A וגם את A^2).

תרגיל 11.16. ט"ל $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ המקיימת $\dim kerT < \dim ImT$ וכן $T(1, 2, 3) = (-2, -4, -6)$. הוכח כי $T - 2I$איזומורפיזם.

פתרון: מתקיים $\dim ImT \neq 0$ ומשיקולי מימדים מתקיים $\dim kerT = 2$ ו-$\dim ImT = 1$ (כי סכומם 3). לכן 0 הוא ע"ע של T עם ריבוי גאומטרי 2 ($V_0 = kerT$). בנוסף, -2 הוא ע"ע כי $T(1, 2, 3) = -2(1, 2, 3)$, ואלו כל הע"ע. לכן 2הוא לא ע"ע ולכן $2I - T$ חח"ע ולכן היא איזומורפיזם וכנ"ל ל-$T - 2I$.

תרגיל 11.17. תהי $A \in M_n(\mathbb{R})$ כך ש $A \neq I, 0$ וכן $A^2 = A$. הוכח כי $0, 1$ הם הע"ע העצמיים היחידים של המטריצה.

פתרון: מתקיים $(I - A)A = 0$. אם 0 לא ע"ע של A אז A הפיכה ולכן אפשר לצמצם ולקבל $A = I$ בסתירה לנתון. באופן דומה, אם 1 לא ע"ע של A אז $I - A$ הפיכה ולכן אפשר לצמצם בה ולקבל $A = 0$, שוב סתירה. לכן $0, 1$ הם ע"ע של המטריצה. כמו כן, לכל ע"ע λ קיים ו"ע $v \neq 0$ ומתקיים $A^2v = \lambda^2 v$ וכן $Av = \lambda v$ לכן $\lambda = \lambda^2$ ולכן בהכרח $\lambda = 0, 1$. לכן אלו הע"ע של A והם היחידים.

בממ"ן שהשאלה הופיעה - הרבה הוכיחו רק חלק אחד (שהם ע"ע או שהם יחידים) אבל לא את שני החלקים. לשים לב לניסוח!

הערה: אפשר בנתונים אלו גם להוכיח ש-A לכסינה על ידי בחירת בסיס מתאים.

תרגיל 11.18. תהי A מטריצה ריבועית ממשית כך שלכל $\lambda \in \mathbb{R}$ למשוואה $Ax = \lambda x$ פתרון יחיד. הוכח כי המטריצה אינה לכסינה ותנו דוגמא למטריצה כזו מסדר 2×2.

פתרון: לכל $\lambda \in \mathbb{R}$ וקטור האפס הוא פתרון למשוואה ומאחר ויש פתרון יחיד הרי שאין $\lambda \in \mathbb{R}$ עבורו יש $v \neq 0$ כך ש $Av = \lambda v$. לכן ל-A אין ע"ע ולכן היא לא לכסינה. דוגמא למטריצה כזו מסדר 2×2 היא $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

תרגיל 11.19. נתונה מטריצה $A = \begin{pmatrix} a & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ b & 5 & 4 \end{pmatrix}$ ונתון ש-$(1,1,1)^t$ הוא ו"ע שלה. מצא את a, b וקבע אם המטריצה לכסינה.

פתרון: קיים λ עבורו $\begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ b & 5 & 4 \end{pmatrix}$. לכן $\begin{cases} a+3 & = \lambda \\ 3 & = \lambda \\ b+9 & = \lambda \end{cases}$. לכן $\lambda = 3, a = 0, b = -6$. לכן המטריצה היא $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ והפולינום האופייני הוא $p_A(t) = (t-4)(t-3)(t+1)$.
לכן יש 3 ע"ע שונים והמטריצה לכסינה.

תרגיל 11.20. תהי $A \in M_3(\mathbb{R})$ מדרגה 2 המקיימת $\begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ וכן $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$. כמה פתרונות יש למערכת $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = (A+4I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

פתרון: המטריצה מדרגה 2 ולכן 0 הוא ע"ע. בנוסף, שני הוקטורים הנתונים הם ו"ע בת"ל של הע"ע 2 ולכן 2 ע"ע עם ריבוי גאומטרי 2 ו-0 ע"ע עם ריבוי גאומטרי 1. אלו הם כל הע"ע של A ולכן בהכרח -4 הוא לא ע"ע ולכן $-4I - A = -(A+4I)$ היא רגולרית. לכן למערכת הזו יש פתרון יחיד.

תרגיל 11.21. תהי A מטריצה ממשית שהפולינום האופייני שלה הינו $p_A(x) = (x+1)^2(x-5)^2(x-1)$.

1. חשבו את $\det(A^2 - 5A)$.
2. הוכיחו ש-A לכסינה אם"ם $\rho(A+I) + \rho(A-5I) = 6$.
3. מצאו את כל הערכים של המספר הממשי c כך שהמטריצה $cA - I$ הפיכה.

פתרון:

1. מתקיים $p_A(5)=0$ לכן 5 הוא ע"ע ולכן $\det(A^2-5A)=\det(A)\det(A-5I)=0$.
2. למטריצה A יש 3 ע"ע: 1 עם ריבוי אלגברי וגאומטרי 1, 5 עם ריבוי אלגברי 2 ו--1 עם ריבוי אלגברי 2. המטריצה לכסינה אם"ם הריבויים הגאומטריים של 2 ו--1 הם גם 2. הריבוי הגאומטרי של כל אחד מהם הוא $5-\rho(\lambda I-A)$ עבור ה-λ המתאים. אם הריבוי הגאומטרי הוא 2 אז בהכרח כל אחת מהדרגות היא 3 והסכום הוא 6.

   ולהפך - אם סכום הדרגות הוא 6 אז סכום הריבויים הוא 4. מאחר וכל ריבוי אלגברי קטן או שווה ל-2, בהכרח שניהם גם שווים ל-2. לכן המטריצה לכסינה.
3. בבירור עבור $c=0$ המטריצה הפיכה. אחרת המטריצה שווה ל-$c(A-\frac{1}{c}I)$ והפיכה אם"ם $A-\frac{1}{c}I$ אם"ם $\frac{1}{c}I-A$ הפיכה אם"ם $\frac{1}{c}$ אינו ע"ע. כלומר המטריצה סינגולרית אם"ם $\frac{1}{c}=5,\pm1$ כלומר אם"ם $c=\frac{1}{5},\pm1$.

לעבור על הממ"ן והממ"ח הקרובים ולדבר על השאלות שאפשר לפתור.

12 המרחב האוקלידי $\mathbb{R}^n$

מסתכלים שוב על $\mathbb{R}^n$ ומגדירים עליו כפל בין וקטורים:

הגדרה (12.1.1). **עבור** $a=(a_{1,},...,a_n),b=(b_1,...,b_n)\in\mathbb{R}^n$ **מגדירים את המכפלה הסקלרית:**

$$a\cdot b=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$$

התשובה היא סקלר ולכן המכפלה נקראת מכפלה סקלרית.

ראינו כבר את המכפלה הסקלרית בהקשר של כפל מטריצות.

תכונות:

- סימטריה $a\cdot b=b\cdot a$
- לינאריות $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$
- הומוגניות $(\lambda a)\cdot b=\lambda(a\cdot b)=a\cdot(\lambda b)$
- חיוביות $a\cdot a\geq 0$
- קיבוציות לא מתקיימת! אין משמעות ל- $a\cdot(b\cdot c)$ כי אין סגירות.

תרגיל 12.1. יהיו v_1,v_2,v_3 ב-$\mathbb{R}^n$ המקיימים: $\begin{cases}v_1\cdot v_1 & =2\\ v_2\cdot v_2 & =3\\ v_3\cdot v_3 & =6\end{cases}$ וכן $\begin{cases}v_1\cdot v_2 & =-1\\ v_2\cdot v_3 & =-3\\ v_1\cdot v_3 & =0\end{cases}$. הוכח כי 3 הוקטורים בת"ל.

פתרון:

- נבדוק מתי מתקיים $\lambda_1v_1+\lambda_2v_2+\lambda_3v_3=0$. נכפול את המשוואה סקלרית בכל פעם בוקטור אחר ונקבל:

$$\begin{cases}2\lambda_1-\lambda_2+0\lambda_3 & =0\\ -\lambda_1+3\lambda_2-3\lambda_3 & =0\\ 0\lambda_1-3\lambda_2+6\lambda_3 & =0\end{cases}$$

פותרים, מקבלים פתרון יחיד ולכן הקבוצה בת״ל.

- דרך שנייה: נשתמש בגרהם שמידט (אפשר לחזור לתרגיל הזה בסוף השיעור, אחרי שמציגים את גרהם שמידט, ואז להציג את הפתרון הזה).
- ראשית נשים לב כי $v_1 \perp v_3$ ולכן $\{v_1, v_3\}$ קבוצה בת״ל. נשאר להוסיף את v_2:

$$u_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot v_1}{||v_1||^2}v_1 - \frac{v_2 \cdot v_3}{||v_3||^2}v_3 = v_2 + 0.5v_1 + 0.5v_3$$

האם הקבוצה $\{v_1, v_3, u_2\}$ בת״ל?
תשובה: לא בהכרח. הפעלנו את גרהם-שמידט על קבוצה שלא ידענו שהיא בת״ל ולכן במהלך התהליך ייתכן ונקבל קבוצה ת״ל. מה שיקרה זה שהוקטור שת״ל בקודמים יתאפס (כי ההטלה שלו היא הוא עצמו). לכן כדי שהקבוצה תהיה בת״ל צריך לבדוק האם $u_2 = 0$. נניח בשלילה $u_2 = 0$ ונשתמש בנתון שטרם השתמשנו בו: $v_2 \cdot v_2 = 0$:

$$v_2 \cdot (v_2 + 0.5v_1 + 0.5v_3) = 0$$

ולכן

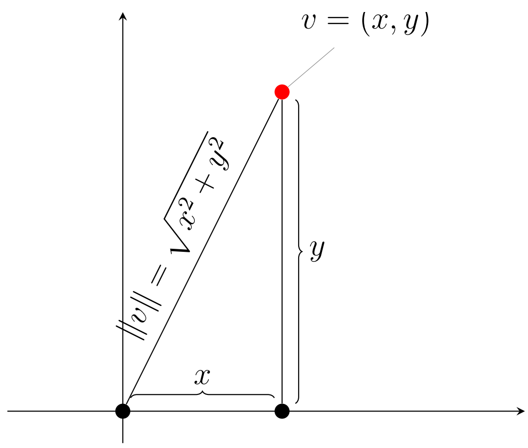
$$-3 - 0.5 - 1.5 = 0$$

קיבלנו סתירה ולכן $u_2 \neq 0$ ולכן בהכרח הקבוצה בת״ל ולכן גם הקבוצה המקורית קבוצה בת״ל (צ״ל של הקבוצה האורתוגונלית או לחילופין פורשות אותו מרחב ממימד 3).

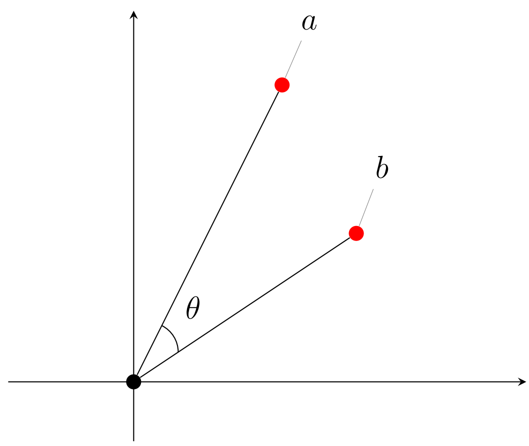
שני שימושים למכפלה סקלרית:

1. באמצעות מכפלה סקלרית ניתן להגדיר אורך (מרחק של נקודה מהראשית):

$$||a|| = \sqrt{a \cdot a}$$



2. **כמו כן, באמצעות המכפלה הפנימית ניתן לחשב זווית בין שני וקטורים:** $a \cdot b = ||a|| \cdot ||b|| \cos(\theta)$ **(הזווית נמדדת בראשית).**



אפשר לדלג, בד"כ פחות רלוונטי

נוסחאות שימושיות:

- **קושי-שוורץ:** $|a \cdot b| \leq ||a|| \cdot ||b||$
- **אי שוויון המשולש:** $||a + b|| \leq ||a|| + ||b||$
- **שוויון המקבילית:** $||a + b||^2 + ||a - b||^2 = 2(||a||^2 + ||b||^2)$.

12.1 אורתוגונליות

שני וקטורים אורתוגונליים (ניצבים) אם הזווית ביניהם היא $\pi/2$ כלומר אם"ם $a \cdot b = 0$. במקרה כזה מסמנים $a \perp b$.

תרגיל 12.2. מצא את כל הוקטורים הניצבים ל$(1, 2)$.

פתרון: מחפשים את כל הוקטורים המקיימים $(x,y)\cdot(1,2)=0$ כלומר $x+2y=0$. זו משוואה הומוגנית ולכן יש אינסוף פתרונות והקבוצה של הוקטורים הניצבת ל-$(1,2)$ היא $sp\{(-2,1)\}$, כלומר זהו מ"ל.

הגדרה. יהי $U\subseteq\mathbb{R}^n$ מ"ל, $v\in\mathbb{R}^n$. הוקטור v ניצב למרחב U אם לכל $u\in U$ מתקיים $v\perp u$. במקרה כזה רושמים $v\perp U$.

לפי הדוגמא הקודמת, $(1,2)\perp sp\{(-2,1)\}$.

ההגדרה הזו קשה לבדיקה כי קשה לבדוק כל וקטור במרחב הלינארי (יש אינסוף). במקום זאת אפשר להשתמש ב:

***משפט** (3.2.12).* $v\perp U$ אם"ם $v\perp K$ כאשר $U=spK$.

לכן מספיק לבדוק ניצבות בין v לבין כל אחד מהוקטורים בקבוצה הפורשת את U.

הגדרה 12.1. עבור מרחב לינארי $U\subseteq\mathbb{R}^n$ מגדירים את המשלים האורתוגונלי $U^\perp=\{v\in\mathbb{R}^n|v\perp U\}$, כלומר זהו אוסף הוקטורים הניצבים ל-U.

דוגמה. $\{0\}^\perp=\mathbb{R}^n;(\mathbb{R}^n)^\perp=\{0\}$

תכונות:

- לכל U, הקבוצה $U^\perp$ היא מרחב לינארי.
- $(U^\perp)^\perp=U$
- $U\cap U^\perp=\{0\}$
- לכן $U\oplus U^\perp=\mathbb{R}^n$. כלומר כל וקטור $v\in\mathbb{R}^n$ ניתן לרשום בתור $v=v_\perp+v_\parallel$ כאשר $v_\parallel\in U$ ו-$v_\perp\in U^\perp$ באופן יחיד: כל וקטור הוא סכום של וקטור מקביל ל-U וניצב ל-U.
  ניתן לשרטט זאת ב-$\mathbb{R}^2$. נראה איך למצוא אותם בהמשך.
- קבוצת הפתרונות של $Ax=0$ היא $(W_A^R)^\perp$. משפט זה נותן לנו שיטה למצוא את המשלים האורתוגונלי. **(טענה 12.3.1)**

עבור $K\subseteq\mathbb{R}^n$ (לאו דווקא מרחב לינארי) ניתן להגדיר באופן דומה $K^\perp$. מתקיים:

- הקבוצה $K^\perp$ היא מ"ל.
- $\left(K^\perp\right)^\perp=spK$.

תרגיל 12.3. מצא בסיס ל-$U^\perp$ עבור $U=sp\{(3,12,-1)\}$.

פתרון: לפי טענה 12.3.1 נמצא את מרחב הפתרונות של $\begin{pmatrix}3 & 12 & -1\end{pmatrix}\underline{x}=0$ והפתרון הכללי הוא $U^\perp=sp\{(1,0,3),(0,1,12)\}$.

תרגיל 12.4. יהיו $0\neq v_1,v_2\in\mathbb{R}^n$. הוכח $\{v_1\}^\perp=\{v_2\}^\perp$ אם"ם הם ת"ל.

פתרון:

- נניח שהם ת"ל. לכן קיים $\lambda \in \mathbb{R}$ כך ש-$v_1 = \lambda v_2$. בהכרח $\lambda \neq 0$. אחרת לכל $u \in \mathbb{R}^n$ מתקיים $u \cdot v_1 = 0$ אם"ם $u \cdot \lambda v_2 = 0$ אם"ם $u \cdot v_2 = 0$ ולכן $\{v_1\}^\perp = \{v_2\}^\perp$.
- נניח $\{v_2\}^\perp = \{v_1\}^\perp$. לכן $(\{v_2\}^\perp)^\perp = (\{v_1\}^\perp)^\perp$. לכן $sp\{v_1\} = sp\{v_2\}$ בפרט $v_1 \in sp\{v_2\}$ ולכן הם ת"ל.

תרגיל 12.5. יהיו $U_1, U_2 \in \mathbb{R}^n$ כך ש $U_1 + U_2 = \mathbb{R}^n$. הוכח $U_1^\perp \cap U_2^\perp = \{0\}$.

פתרון:

- פתרון שגוי ונפוץ: אנחנו יודעים $U_1 + U_1^\perp = \mathbb{R}^n$ ולכן $U_2 = U_1^\perp$ ובפרט

$$U_1^\perp \cap U_2^\perp = U_2 \cap U_2^\perp = \{0\}$$

אבל אין "חיסור בין מרחבים לינאריים" ולכן הטיעון לא נכון.

- פתרון נכון: יהי $v \in U_1^\perp \cap U_2^\perp$. בפרט $v \in \mathbb{R}^n$ לכן קיימים $w_1 \in U_1, w_2 \in U_2$ כך ש-$v = w_1 + w_2$. נחשב את הנורמה: $v \cdot v = v \cdot w_1 + v \cdot w_2 = 0 + 0 = 0$ (כי $v \perp U_1, U_2$) ולכן בהכרח $U_1^\perp \cap U_2^\perp = \{0\}$.

תרגיל 12.6. תהי $A = \{v_1, ..., v_k\}$ תת קבוצה של $\mathbb{R}^n$כאשר $k \geq 2$. הוכיחו שאם $A^\perp = \{v_2, ..., v_k\}^\perp$ אז A ת"ל.

פתרון: מתקיים $(A^\perp)^\perp = sp\{v_2, ..., v_k\}$ אך גם $(A^\perp)^\perp = spA = sp\{v_1, ..., v_k\}$. לכן $v_1 \in sp\{v_2, ..., v_k\}$ ולכן הקבוצה ת"ל.

תרגיל 12.7. יהי $B = \{v_1, ..., v_n\}$ בסיס של $\mathbb{R}^n$ עבור $n > 1$. הוכח כי אם $C = \{v_1, ..., v_{n-1}\} \perp v_1 - v_n$ אז $v_1 + v_n$ אינו אורתוגונלי ל-C.

פתרון: מתקיים $v_1 - v_n \in C^\perp$. נניח בשלילה כי גם$v_1 + v_n \in C^\perp$. זהו מרחב לינארי לכן גם סכומם, $2v_1 \in C^\perp$ אבל אז $v_1 \perp v_1$ וזה לא ייתכן כי $v_1 \neq 0$.

פתרון נוסף: C תת קבוצה של קבוצה בת"ל לכן גם בת"ל ולכן $\dim sp(C) = n - 1$. לכן $\dim C^\perp = 1$ ולכן $C^\perp = sp\{v_1 - v_n\}$. אם $v_1 + v_n \perp C$ אז $v_1 + v_n$ פרופורציוני ל-$v_1 - v_n$. שני הוקטורים הם במ"ל $W = sp\{v_1, v_n\}$ והקואורדינטות שלהם לפי בסיס זה הינן $(1,1)^t$ו-$(1,-1)^t$. וקטורים אלו בת"ל לכן גם הוקטורים המקוריים בת"ל, סתירה.

12.2 בסיסים אורתוגונליים ואורתונומליים

הגדרה 12.2. קבוצה $K = \{v_1, ..., v_k\}$ נקראת אורתוגונלית אם כל שני וקטורים שלה ניצבים ($i \neq j \to v_i \cdot v_j = 0$) וכן $0 \notin K$.

אם לכל i מתקיים גם $||v_i||=1$ הקבוצה נקראת אורתונורמלית.

דוגמה. הקבוצה $\{(0,1,12),(3,12,-1)\}$ היא אורתוגנולית אבל לא אורתונורמלית. הקבוצה $E=\{e_i\}$ (הבסיס הסטנדרטי) היא אורתונורמלית.

כל קבוצה אורתוגונלית ניתן להפוך לקבוצה אורתונורמלית על ידי נרמול: $v_i \to \frac{v_i}{||v_i||}$.

***משפט** (2.4.12). קבוצה אורתוגונלית היא בת"ל.*

לכן מעניין להסתכל על בסיסים אורתוגונליים, כלומר בסיס למרחב U שהינו קבוצה אורתוגונלית. למשל, הבסיס הסטנדרטי הוא בסיס אורתוגונלי (אורתונורמלי). בסיסים אורתוגונוליים נוחים לעבודה כי ניתן בקלות למצוא את מקדמי הצירוף הלינארי ולחשב נורמות:

***משפט.** נניח $B=(b_1,..,b_n)$ בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{R}^n$. אז מתקיים:*

- *לכל $a\in\mathbb{R}^n$ מתקיים $a=\sum(a\cdot b_i)b_i$.*
  כלומר הסקלר שכופל את b_i בצירוף הלינארי שנותן את a הוא $a\cdot b_i$. להבדיל - אם B לא היה בסיס אורתונורמלי, כדי למצוא את הסקלר הזה היה צריך לפתור מערכת משוואות כמו בפרק 2.
- *לכל $a,c\in\mathbb{R}^n$ המכפלה הסקלרית: $a\cdot c=\sum(a\cdot b_i)(c\cdot b_i)$.*
- *ולכן $||a||^2=\sum(a\cdot b_i)^2$.*

העבודה עם בסיס אורתונורמלי נראית פשוטה יותר ולכן שאלה מעניינת היא האם לכל $U\subseteq\mathbb{R}^n$ קיים בסיס אורתונורמלי וכיצד למצוא אותו.

תרגיל 12.8. תהי $K=\{u_1,...,u_k\}$ קבוצה אורתונורמלית ב-$\mathbb{R}^n$ ויהי $v\in\mathbb{R}^n$. הוכח: אם $||v||^2=\sum(v\cdot u_i)^2$ אז $v\in sp(K)$.

פתרון: ניתן להשלים את K לבסיס אורתונורמלי של $\mathbb{R}^n$, נניח על ידי הוקטורים $w_1,...,w_p$ (כלומר $K^\perp=sp\{w_1,...,w_p\}$). זהו בסיס אורתונורמלי ולכן לפי המשפט מתקיים $||v||^2=\sum(v\cdot u_i)^2+\sum(v\cdot w_i)^2$. לפי הנתון הנורמה שווה למחובר השמאלי ולכן נקבל $\sum(v\cdot w_i)^2=0$. מדובר על סכום מספרים אי שליליים ולכן בהכרח כולם אפס, כלומר $v\perp w_1,w_2,...w_p$. לכן $v\perp sp\{w_1,...,w_p\}$ כלומר $v\in(K^\perp)^\perp=sp(K)$, כנדרש.

***משפט** (מציאת היטל). יהי $B=(u_1,...,u_k)$ בסיס אורתוגונלי של U ויהי $u\in\mathbb{R}$. ההיטל של u על U הינו $u_\parallel=\sum\frac{a\cdot u_i}{||u_i||^2}u_i$ (מסקנה 12.4.6). לכן $u_\perp=u-u_\parallel$.*

12.3 תהליך גרהם-שמידט

נניח שנתון $U\subseteq\mathbb{R}^n$עם בסיס $B=(b_1,...,b_k)$. אנחנו רוצים למצוא בסיס ל-U בעזרת B, אבל שיהיה בסיס אורתוגונלי. התהליך שעושה זאת נקרא תהליך גרהם-שמידט. התהליך מוגדר בשלבים:

1. שלב ראשון: $c_1 = b_1$. קבוצה של וקטור אחד היא אורתוגונלית ואין בעיה.
2. שלב שני: היינו רוצים להוסיף את b_2 לבסיס אבל ייתכן והוא לא אורתוגונלי ל-c_1. לכן נוריד מ-b_2 את היטלו על $sp\{c_1\}$ וככה נישאר עם וקטור אורתוגונלי: $c_2 = b_2 - \frac{b_2 \cdot c_1}{||c_1||^2} c_1$
3. שלב $i+1$: נניח שכבר יש לנו i וקטורים בבסיס. כדי להוסיף את הוקטור הבא צריך להוריד את ההיטל שלו על מה שכבר יש לנו: $c_{i+1} = b_{i+1} - \sum \frac{b_{i+1} \cdot c_j}{||c_j||^2} c_j$.

הקבוצה $C = (c_1, ..., c_k)$ היא אורתוגונלית ומהווה בסיס ל-U.

שאלה: למה C אורתוגונלית זה ברור. אבל למה היא עדיין פורשת את U?

תשובה: כי C נבנתה מ-B על ידי פעולות אלמנטריות ולכן עדיין פורשת את אותו המרחב.

תרגיל 12.9. הפוך את $\{(1,1,1), (1,2,4), (1,5,6)\}$ לבסיס אורתונורמלי של $\mathbb{R}^3$ באמצעות תהליך גרהם שמידט.

פתרון: לפי תהליך גרהם-שמידט נגדיר $v_1 = (1,1,1)$. אנחנו רוצים בסיס אורתונורמלי לכן ננרמל: $v_1 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$. לכן

$$v_2 = (1,2,4) - \left((1,2,4) \cdot (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})\right)(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) = (-\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{5}{3})$$

בדיקה: $v_1 \cdot v_2 = 0$ כדרוש. שוב ננרמל: $v_2 = \left(\frac{-4}{\sqrt{42}}, \frac{-1}{\sqrt{42}}, \frac{5}{\sqrt{42}}\right)$כמו כן:

$$\begin{aligned} v_3 &= (1,5,6) - \left((1,5,6) \cdot (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})\right)(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) \\ &- \left((1,5,6) \cdot \left(\frac{-4}{\sqrt{42}}, \frac{-1}{\sqrt{42}}, \frac{5}{\sqrt{42}}\right)\right)\left(\frac{-4}{\sqrt{42}}, \frac{-1}{\sqrt{42}}, \frac{5}{\sqrt{42}}\right) \end{aligned}$$

ואחרי נירמול נקבל $v_3 = \left(\frac{-2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}, -\frac{1}{\sqrt{14}}\right)$.

אפשרות נוספת הייתה קודם למצוא את הבסיס האורתוגונלי ואז לנרמל (ככה לא צריך לחשב שורשים אלא בסוף).

תרגיל 12.10. תהי $\{v_1, v_2\}$ קבוצה בת"ל ב-$\mathbb{R}^n$. נתון $0 \neq u \in \mathbb{R}^n$ האורתוגונלי ל-$\{v_1 - v_2, v_1 + v_2\}$. צ"ל $n \geq 3$.

פתרון: האינטואיציה: כדי להוכיח שהמימד הוא לפחות 3 צריך להראות שיש קבוצה בת 3 איברים בת"ל במרחב. דרך אחת היא להוכיח ש$\{v_1 - v_2, v_1 + v_2\}$ בת"ל (ישירות או ע"י וקטורי קוארדינטות או בכל דרך אחרת) ומכך ש-u אורתוגונלי לקבוצה זו הוא בת"ל בהם.

דרך נוספת היא להוכיח שu אורתוגונלי לקבוצה המקורית: מתקיים $u \cdot v_1 = u \cdot v_2$ וגם $u \cdot v_1 = -u \cdot v_2$. לכן $u \cdot v_1 = u \cdot v_2 = 0$ לכן $u \perp \{v_1, v_2\}$ ולכן הקבוצה $\{v_1, v_2, u\}$ בת"ל כלומר $n \geq 3$.

תרגיל 12.11. מצא בסיס אורתוגונלי למשלים האורתוגונלי של מרחב העמודות של
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

פתרון: המשלים האורתוגונלי של מרחב העמודות הוא מרחב הפתרונות של A^t לכן

$$A^t \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

והפתרון הכללי הינו $(3t - s, -s, -t, s, t)$. לכן $(W_A^C)^\perp = sp\{(3,0,-1,0,1), (-1,-1,0,1,0)\}$. שני הוקטורים לא פרופורציוניים לכן הם בת"ל ואכן זהו בסיס. נשאר להפוך אותו לבסיס אורתוגונלי על ידי גרהם שמידט:

$$(-1,-1,0,1,0) + \frac{3}{11}(3,0,-1,0,1) = (-\frac{2}{11}, -1, -\frac{3}{11}, 1, \frac{3}{11})$$

והבסיס האורתוגונלי הינו $\{(3,0,-1,0,1), (-\frac{2}{11}, -1, -\frac{3}{11}, 1, \frac{3}{11})\}$.

נגמר!

13 חזרה למבחן - תרגילים ממבחנים

במבחן 5 שאלות. שאלת חובה בסגנון ממ"ח ובחירה של 3 מתוך 4 (פתוחות). כמה המלצות לקראת המבחן:

- המבחן עם ספרים. לרפרף שוב על הספרים, לסמן משפטים חשובים ושימושיים ולוודא שאתם יודעים להתמצא בהם.
- להביא את הטכניקה שיש בקורס לרמה של "אוטומטיות". למשל - לדרג מטריצה, ללכסן מטריצה, למצוא בסיס למרחב וכו'. פעולות אלו מאוד טכניות וצריך לתרגל עד שעושים אותן מהר וטוב.
- לתרגל על ידי פתרון מבחני עבר תוך שימוש בספרים בלבד - זו דרך מעולה לתרגל את העבודה עם הספרים לקראת המבחן.
- החומר הוא כמו "מטריושקה" - שאלה שמתחילה במשהו על פרק 11 ממשיכה במשהו בפרק 9 ואז פרק 8 וכו'. לכן אי אפשר "לוותר" על פרקים וצריך לדעת הכל.

באתר יש הקלטות של מרתוני תרגול לקראת מבחנים משנים עברו וניתן לצפות גם בהם.

הפרק הזה מכיל מבחר שאלות ממבחני עבר, בעיקר שאלות שמתבססות על הבנה והוכחות ולא שאלות של טכניקה, כי אותן היו מספיק לאורך הקורס, כי הן משעממות וכי אין תועלת בלראות אותי פותר אותן...

תרגיל 13.1. תהיינה A, B מאותו סדר המקיימות $A = BC$ כאשר C הפיכה. הוכיחו כי מרחב העמודות של A שווה למרחב העמודות של B.

פתרון: מרחב העמודות של מטריצה שווה למרחב השורות של המשוחלפת ולכן $A^t = C^t B^t$. המטריצות A^t, B^t שקולות שורות (כי A^t התקבלה על ידי כפל B^t משמאל במטריצה הפיכה) ולכן מרחבי השורות שלהן זהים.

תרגיל 13.2. יהיו v, u, w וקטורים במרחב לינארי V.

1. נניח שהוקטורים תלויים לינארית. האם בהכרח $sp\{u, v\} = sp\{u + w, v + w\}$?
2. נניח שהקבוצה $\{u, v\}$ בת"ל ו-$w \notin sp\{u, v\}$. האם הקבוצה $\{u + w, v + w\}$ בהכרח בת"ל?

פתרון:

1. לא. כדי להפריך נראה דוגמא נגדית: $u = 0, v = e_1, w = e_2$ ב-$\mathbb{R}^2$. הקבוצה תלויה לינארית (וקטור האפס בפנים) אבל $sp\{u, v\} = sp\{e_1\} \neq sp\{e_2, e_1 + e_2\} = \mathbb{R}^2$.

2. כן. הקבוצה $\{u,v,w\}$ בת"ל כי $\{u,v\}$ בת"ל ו-$w \notin sp\{u,v\}$. נבצע פעולה אלמנטרית של חיבור ונקבל את הקבוצה הבת"ל: $\{u+w, v+w, w\}$. לכן גם תת הקבוצה $\{u+w, v+w\}$ בת"ל. דרך נוספת: באמצעות צירוף לינארי של איברי הקבוצה.

תרגיל 13.3. יהי V מ"ל נוצר סופית ויהיו $U, W_1, W_2 \subseteq V$ תתי מרחבים המקיימים $U + W_1 = U + W_2$. הוכח או הפרך:

1. $\dim W_1 = \dim W_2$
2. אם $U \cap W_1 = \{0\}$ אז $U \cap W_2 = \{0\}$.

פתרון:

1. הטענה אינה נכונה. למשל $U = V = \mathbb{R}^2$, $W_2 = \mathbb{R}^2, W_1 = \{0\}$. מתקיים $U+W_1 = U+W_2 = \mathbb{R}^2$ אבל מימדיהם אינם שווים.
2. הטענה אינה נכונה, אותה הדוגמא.

תרגיל 13.4. האם קיימת העתקה לינארית $T : \mathbb{R}_4[x] \to R_4[x]$ המקיימת $T(x^3) = T(1+x+x^2) = x^2$ וגם $T(1-x) = T(x+x^2) = T(x-x^3) = 3+x$?

פתרון: אם קיימת כזו ט"ל והיא מקיימת $T(v) = T(w)$ אז $T(v-w) = 0$ לכן $v-w \in kerT$. מהנתון, הפולינומים $x^3 - x^2 - x - 1, -x^3 - x^2, -x^3 + 2x - 1$ הם 3 פולינומים בת"ל (הוכח!) הנמצאים בגרעין ולכן $\dim kerT \geq 3$. מצד שני, יש 2 וקטורים בת"ל בתמונה ולכן $\dim ImT \geq 2$ אבל $\dim \mathbb{R}_4[x] = 4$ וקיבלנו סתירה.

תרגיל 13.5. תהיינה A, B מטריצות מסדר $n \times n$ מעל $\mathbb{R}$.

1. הוכיחו שאם $v \in \mathbb{R}^n$ הוא וקטור עצמי משותף ל-Aול-B אז הוא וקטור עצמי של AB וגם של BA.
2. הוכיחו שאם ל-A ול-B יש n ו"ע משותפים ב"ת אז $AB = BA$.

פתרון:

1. v ו"ע של A עם ע"ע λ ושל B עם ע"ע δ. לכן $ABv = A(\delta v) = \delta\lambda v$ ולכן v ו"ע של AB וכנ"ל BA עם אותו ע"ע $\delta\lambda$.
2. נגדיר $T = AB - BA$. עבור כל ו"ע משותף v מתקיים $Tv = ABv - BAv = (\lambda\delta - \delta\lambda)v = 0$ ולכן 0 הוא ע"ע של T. יש n ו"ע בת"ל כאלה לכן המטריצה T לכסינה ודומה למטריצת האפס. המטריצה היחידה הדומה למטריצת האפס היא מטריצת האפס עצמה לכן $T = 0$ ולכן $AB = BA$.

תרגיל 13.6. תהי A מטריצה מדרגה 1 מסדר $n \times n$ לכסינה. הוכיחו שהעקבה שלה שונה מ-0.

פתרון: המטריצה מדרגה 1 לכן היא סינגולרית ו-0 הוא ע"ע שלה עם ריבוי גאומטרי $n-\rho(A)=n-1$. לכן הריבוי האלגברי הוא $n-1$ לכל הפחות ולכן הפולינום האופייני הוא $p_A(t)=t^{n-1}(t-a)=t^n-at^{n-1}$. לכן $a=tr(A)$. אם $a=0$ אז $p_A(t)=t^n$ אז הע"ע היחיד שלה הוא 0 ומאחר והיא לכסינה היא מטריצת האפס - סתירה לדרגה 1. לכן $a\neq 0$.

תרגיל 13.7. יהיו v_1,v_2,v_3,v_4 וקטורים ב-$\mathbb{R}^4$. תהי A מטריצה שעמודותיה הם v_1,v_2, B מטריצה שעמודותיה v_3,v_4 ו-C מטריצה שעמודותיה v_1,v_2,v_3,v_4. הוכיחו או הפריכו:

1. אם $\rho(A)=2$ וגם $\rho(B)=2$ אז בהכרח $\det C\neq 0$.
2. אם $\det C\neq 0$ אז $\rho(A)=\rho(B)=2$.
3. אם למערכת $Ax=v_3$ יש פתרון אז בהכרח $\det C=0$.
4. אם למערכת $Cx=v_3$ יש אינסוף פתרונות אז גם למערכת $Ax=v_3$ יש אינסוף פתרונות.

פתרון:

1. הטענה לא נכונה. למשל $v_1=v_3=e_1$ ו-$v_2=v_4=e_2$.
2. הטענה נכונה. $\det C\neq 0$ אז המטריצה הפיכה וכל העמודות בת"ל. לכן עמודות A בת"ל ועמודות B בת"ל ושתיהן מדרגה 2.
3. כן. למערכת $Ax=v_3$ יש פתרון ולכן v_3 הוא צ"ל של v_1,v_2 ולכן עמודות C ת"ל ולכן $\det C=0$.
4. לא נכון. למשל אם $v_3=v_4=e_3$ ו-$v_1=e_1;v_2=e_2$. למערכת $Cx=e_3$ יש אינסוף פתרונות אבל למערכת $Ax=v_3$ אין פתרון.

בהצלחה!

14 פשעים כנגד מטריצות

נכתב על ידי פרופסור בויד סטפן (סטנפורד)

תורגם ברשות המחבר ברשומה זו נמנה מספר פשעי מטריצה בהם נתקלנו, לצערנו, לעיתים קרובות מדי. היזהרו מאוד לא לבצע פשעים אלו שכן לבודקי התרגילים והמבחנים יש אפס סובלנות בנוגע לפשעים כנגד מטריצות. אתם מוזמנים כמובן לעשות למטריצות ככל היעלה על רוחם בזמנם החופשי או בניירות טיוטא אך מומלץ מאוד להימנע מפשעים אלו בכל עת על מנת לא לטפח הרגלים רעים.

בידקו היטב את עבודתכם - אל תיכנסו לסטטיסטיקה!

פשעי תחביר בפשעי תחבירי, הפושע מנסה לשלב מטריצות (או אובייקטים מתמטיים אחרים) בדרכים אשר מפרות את חוקי התחביר וחוקי הפעולות הבסיסיים. פשעים אלו חמורים ביותר שכן קל מאוד לעבור על העבודה ולוודא שלא בוצעו טעויות תחביריות (למשל, על ידי רישום המימדים בכתב תחתון ליד כל המטריצות ווידוא שהפעולות שבוצעו מותרות). בנוסף, מרגע שבוצעה שגיאת תחביר, אין שום משמעות לביטוי הרשום או לכל פיתוח המתבסס עליו. להלן מספר דוגמאות בסיסיות:

- סכימה, חיסור או השוואה של מטריצות או וקטורים ממימדים שונים.
  לדוגמא: לרשום $A+B$ כאשר $A\in M_{2\times3}(\mathbb{R})$ ואילו $B\in M_{3\times3}(\mathbb{R})$.
- כפל מטריצות ממימדים לא מתאימים, כלומר רישום AB כאשר מספר העמודות של A שונה ממספר השורות של B.
  לדוגמא: לרשום A^tB כאשר $A\in M_{2\times3}(\mathbb{R})$ ואילו $B\in M_{3\times3}(\mathbb{R})$.
- הפעלת אופרטור ההופכי, הדטרמיננטה, העקבה או החזקה על מטריצה שאיננה ריבועית.
  לדוגמא: רישום A^{-1} כאשר $A\in M_{2\times3}(\mathbb{R})$.
- בניית מטריצת בלוקים כאשר המימדים לא מתאימים, למשל כאשר מספר השורות בשתי תתי המטריצות לא שווים.
  לדוגמא: לא ניתן לבנות מטריצת בלוקים מהצורה $[A\,B]$ כאשר $A\in M_{2\times3}(\mathbb{R})$ ואילו $B\in M_{3\times3}(\mathbb{R})$.
- בניית מטריצה מוקטורים במרחב לינארי שאינו מרחב n-יות אלא מרחב הפונקציות, מרחב המטריצות או מרחב לינארי כללי כלשהו.
  לדוגמא: אם $v_1,v_2\in V$ כאשר V מרחב לינארי, לא ניתן לרשום את המשפט "נתבונן במטריצה שעמודותיה v_1,v_2". איך תיראה המטריצה אם למשל $V=\mathbb{R}_3[x]$ ו-$v_1=x, v_2=x^2+3$?

פשעים סמנטיים (ביטויים חסרי משמעות) בפשעים סמנטיים העבריין רושם ביטוי אשר על פניו אינו מפר אף חוק תחבירי אבל בכל זאת חסר משמעות. פשעים אלו קשים יותר לזיהוי מפשעים תחביריים שכן הבעייתיות בביטוי והעדר המשמעות נגזר מכך שהוא סותר משפטים מתמטיים.

- הפעלת אופרטור ההופכי על מטריצה ריבועית אבל סינגולרית (הפעלת אופרטור ההופכי על מטריצה לא ריבועית הוא פשע תחבירי).

  לדוגמא: רישום $(a \cdot a^t)^{-1}$ כאשר $a \in \mathbb{R}^2$ הוא וקטור עמודה.

  הערה: הביטוי $(a \cdot a^t)^{-1} = (a^t)^{-1} \cdot a^{-1}$ מהווה בו זמנית פשע סמנטי ופשע תחבירי.

- צמצום מטריצות ממשוואה בנסיבות לא מתאימות, למשל, כאשר לא ידוע מראש שהמטריצות הפיכות.

  לדוגמא: באופן כללי לא ניתן להסיק ש-$B = C$ מכך ש-$AB = AC$ בהעדר תנאים נוספים על A (למשל – הפיכה).

- פשעי מימדים. לטעון שקבוצה בת m וקטורים פורשת את $\mathbb{R}^n$ כאשר $m < n$ או בלתי תלויה לינארית כאשר $m > n$.

- התייחסות להופכי משמאל של מטריצה "שמנה" (יותר עמודות משורות) או הופכי מימין של מטריצה "רזה".

  לדוגמא, עבור מטריצה $A \in M_{5\times 3}(\mathbb{R})$ לא יתכן כי $A \cdot B$ הפיכה. לעומת זאת, ייתכן בהחלט כי A^tB הפיכה וזה תלוי ב-B.

פשעים אחרים ישנם פשעים נוספים אשר קשה לסווג או שכוללים שגיאות משני הסוגים. שימוש לא מוצדק בזהויות מטריציוניות, למשל, נופל פעמים רבות לקטגוריה זו.

- שימוש בזהות $(AB)^t = A^tB^t$ במקום בזהות הנכונה $(AB)^t = B^tA^t$.

  זו יכולה להיות גם שגיאת תחביר כאשר המימדים של המטריצות לא מאפשרים את ההכפלה A^tB^t.

- שימוש בזהות $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$ במקום הזהות הנכונה $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

  הביטוי $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ מהווה שגיאה תחבירית אם אחת המטריצות A או B לא ריבועית ושגיאה סמנטית אם אחת מהן לא הפיכה.

- שימוש בזהויות כפל מקוצר דוגמת $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$. זהות זו מסתמכת על כך שהמטריצות מתחלפות, כלומר $AB = BA$ מה שלא נכון תמיד עבור מטריצות.

דוגמא

נתבונן בביטוי $(A^tB)^{-1}$כאשר $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ ו-$B \in M_{k\times p}(\mathbb{R})$. נבדוק האם הביטוי תקף ומהם הפשעים שאנחנו עשויים לבצע.

- כופלים את המטריצה A^t משמאל ב-B. בכדי שהמכפלה תהיה מוגדרת מספר העמודות של A^t חייב להיות זהה למספר השורות של B ולכן יש לוודא שמתקיים $m = k$ אחרת נקבל שגיאת תחביר.

  הערה: ההנחה היא ששתי המטריצות הן באמת מטריצות. אם אחת מהמטריצות היא סקלר אין בעיה ברישום זה ללא תלות במימדים של המטריצה שאיננה סקלר.

- המכפלה A^tB היא מסדר $n \times p$. אנחנו מנסים להפוך אותה ולכן דרישת הסף היא שהמטריצה תהיה הפיכה, כך שבהכרח חייב להתקיים גם $n = p$ אחרת נקבל שגיאה סמנטית. בשלב זה ברור כבר כי המימדים של A ו-B חייבים להיות זהים (אלא אם אחד מהם הוא למעשה סקלר).
- כאשר B מטריצה שמנה, לא ניתן להפוך אותה על ידי כפל משמאל. לכן בהכרח B מטריצה רזה או ריבועית, כלומר $m \geq n$.

לסיכום, בכדי לרשום את הביטוי $(A^tB)^{-1}$ יש לוודא קודם כל של-A ו-B את אותם מימדים ושהמטריצות ריבועיות או רזות. גם במקרה כזה עדיין לא מובטח שהמטריצה A^tB הפיכה (ואז הביטוי חסר משמעות), אך בדיקה זו כבר חורגת מהדרישות הבסיסיות ומצריכה נתונים נוספים ומידע נוסף על המטריצות ומאין הן נלקחו. הנקודה המרכזית בדוגמא זו היא שאם המטריצות לא מאותו המימד או שמנות, אזי מובטח שהביטוי חסר משמעות ואין לכתובו!